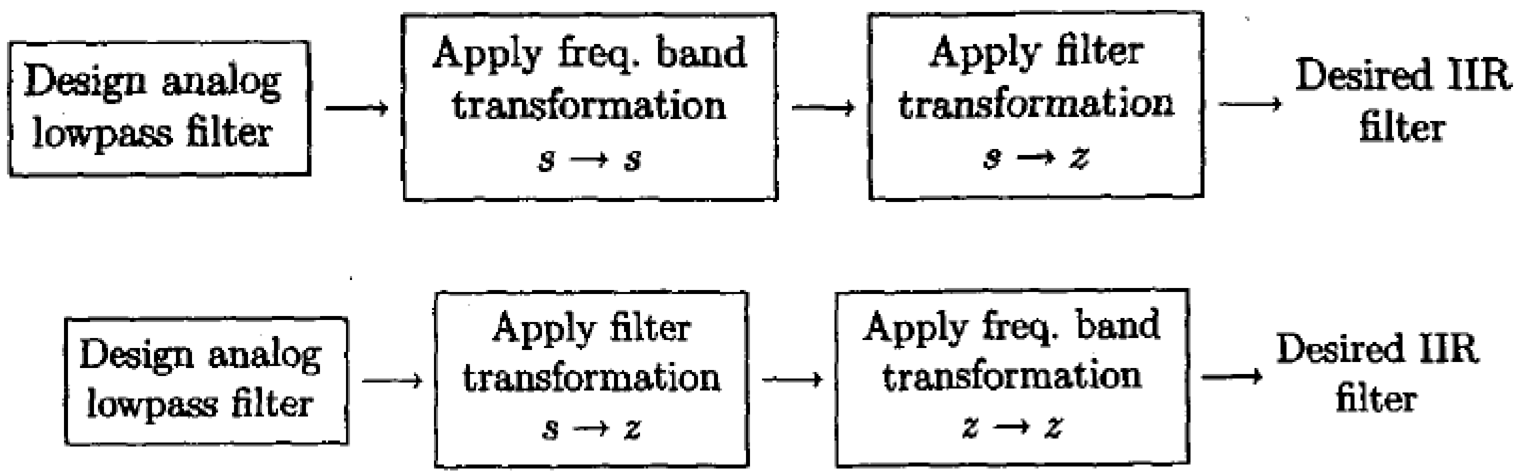
Universidade Federal de Uberlândia
Engenharia Eletrônica e de Telecomunicações

- Processamento digital de sinais – Capítulo 7 – Filtros IIR

Prof. Alan Petrônio Pinheiro

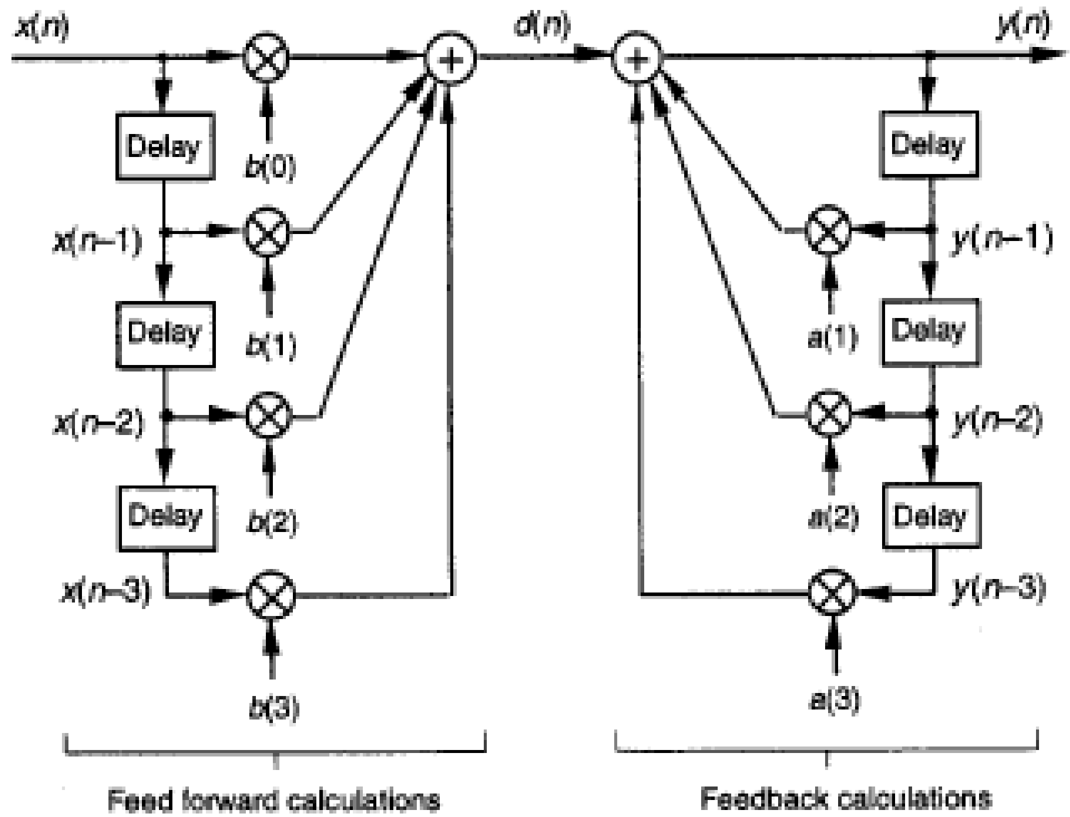
1) Introdução

- Infinite-duration impulse response
  - transformação A/D do filtro:
    - filtros analógicos + mapeamento = digital
- Formas de projeto:



  - Filtros magnitude (nenhum controle sobre fase)

- Estrutura de um filtro IIR
  - Exige menos multiplicações



$$y(n) = b(0)x(n) + b(1)x(n-1) + b(2)x(n-2) + b(3)x(n-3) +$$
$$a(1)y(n-1) + a(2)y(n-2) + a(3)y(n-3)$$

- Comparação FIR x IIR

Characteristic	*IIR*	*FIR*
Number of necessary multiplications	Least	Most
Sensitivity to filter coefficient quantization	Can be high for Direct Form*	Very low
Probability of overflow errors	Can be high for Direct Form*	Very low
Stability	Must be designed in	Guaranteed
Linear phase	No	Guaranteed **
Can simulate prototype analog filters	Yes	No
Required hardware memory	Least	Most
Hardware filter control complexity	Moderate	Simple
Availability of design software	Good	Very good
Ease of design or complexity of design software	Moderately complicated	Simple
Difficulty of quantization noise analysis	Most complicated	Least complicated
Supports adaptive filtering	Yes	Yes

2) Filtros analógicos

- O filtro deve satisfazer:

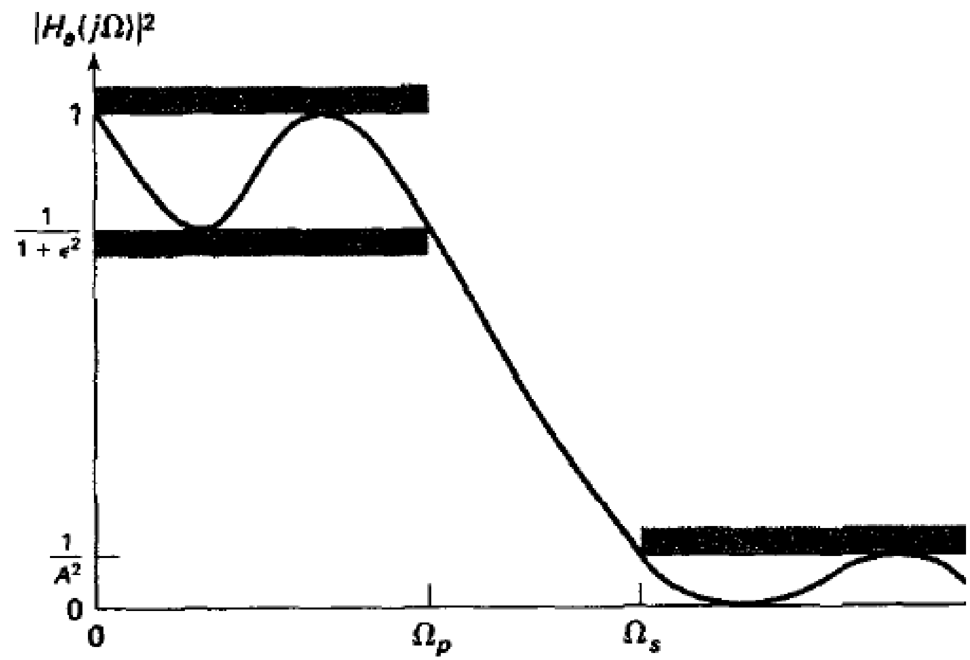
$$|H_a(j\Omega_p)|^2 = \frac{1}{1+\epsilon^2} \quad \text{at } \Omega = \Omega_p$$

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{A^2} \quad \text{at } \Omega = \Omega_s$$

considerando os parâmetros:

$$R_p = -10\log_{10}\frac{1}{1+\epsilon^2} \Longrightarrow \epsilon = \sqrt{10^{R_p/10}-1}$$

$$A_s = -10\log_{10}\frac{1}{A^2} \Longrightarrow A = 10^{A_s/20}$$



- Tipos clássicos de filtros passa-baixas:
  - Butterworth; Chebyshev ; Elíptico

Filtro Butterworth:

- Resposta plana

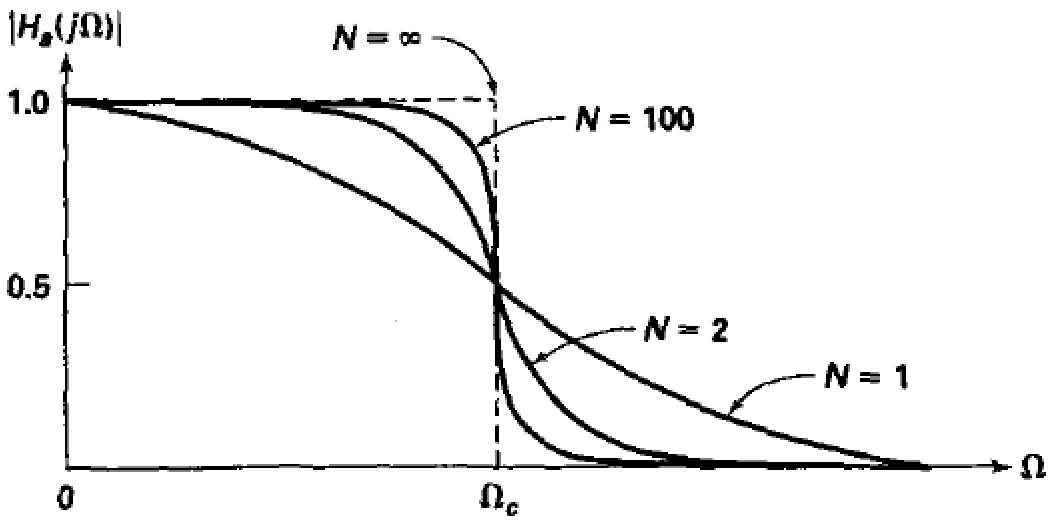
$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

$$N = \frac{\log_{10}[(10^{R_p/10}-1)/(10^{A_s/10}-1)]}{2\log_{10}(\Omega_p/\Omega_s)}$$

$$\Omega_c = \frac{\Omega_p}{\sqrt[2N]{(10^{R_p/10}-1)}}$$

$$\Omega_c = \frac{\Omega_s}{\sqrt[2N]{(10^{A_s/10}-1)}}$$

- Resposta e ordem do filtro:



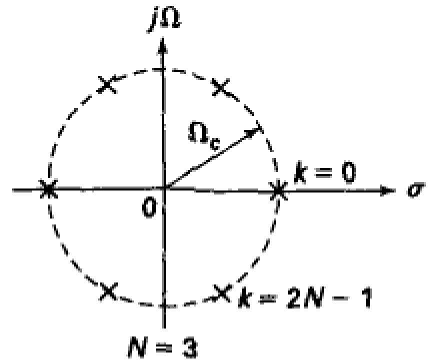
Pontos importantes:

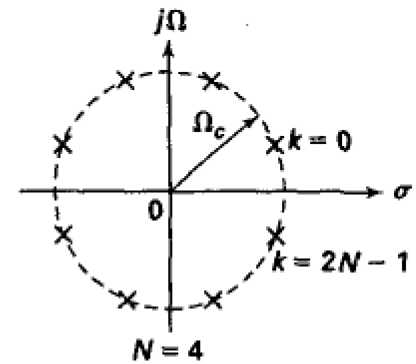
•Em $\Omega=0$, $H(j0)^2=1$ (qualquer N)

•Em $\Omega=\Omega_c$, $H(j\,\Omega_c)^2=0.5=3dB$ (qq N)

- Mais equações do filtro

$$H_a(s) = \frac{\Omega_c^{\ N}}{\prod (s - p_k)}$$





- Pontos importantes:
  - Existem 2N polos igualmente distribuídos em círculo raio Ωc com espaçamento de π/N;
  - Polos para N ímpar:

$$p_k = \Omega_c e^{jk\pi/N}, \quad \mathrm{k} = 0,1,\ldots 2N-1$$

  - Polos para N par:

$$p_k = \Omega_c e^{j((\pi/2N)+(k\pi/N))}, \quad \mathrm{k} = 0,1,\ldots 2N-1$$

  - Os polos são simetricamente localizados em relação eixo jw
  - Polos nunca caem no eixo imaginário e caem eixo real se N ímpar

- Exemplo: projeto um filtro Butterworth para satisfazer: Ω_p=0,2π com ripple de 7dB e Ω_s=0,3π com ripple de 16dB.

Solução:

Determinando a ordem:

$$N = \left\lceil \frac{\log_{10}\left[\left(10^{0.7}-1\right)/\left(10^{1.6}-1\right)\right]}{2\log_{10}\left(0.2\pi/0.3\pi\right)} \right\rceil = \lceil 2.79 \rceil = 3$$

A partir da ordem, é possível estimar a frequência de corte Ω_c usando duas diferentes fórmulas:

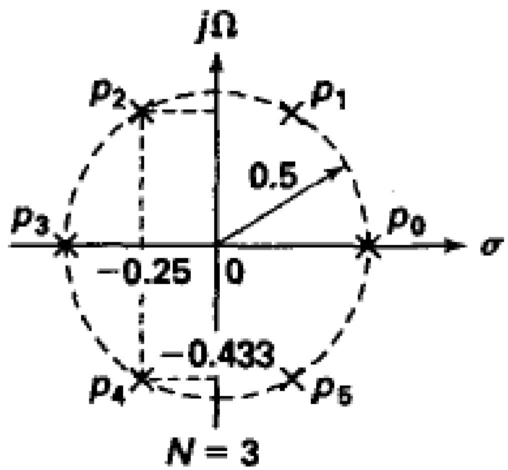
$$\Omega_c = \frac{0.2\pi}{\sqrt[6]{(10^{0.7}-1)}} = 0.4985 \qquad \Omega_c = \frac{0.3\pi}{\sqrt[6]{(10^{1.6}-1)}} = 0.5122$$

Escolhe-se o valor de 0.5

Estimação da função geral:

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\Omega}{0.5}\right)^{2(3)}} = \frac{1}{1+64\Omega^6}$$

Cálculo dos polos:



Considerar somente polos na esquerda do plano s

Usando a relação geral do filtro:

$$H_a(j\Omega) = \frac{\Omega_c^3}{(s-s_2)(s-s_3)(s-s_4)} = \frac{1/8}{(s+0.25-j0.433)(s+0.5)(s+0.25+j0.433)}$$

$$= \frac{0.125}{(s+0.5)(s^2+0.5s+0.25)}$$

3) Transformação s -> z

- Três técnicas:
  - invariância ao impulso;
  - transformação bilinear;
  - Métodos otimizados.
- Lembrando Laplace: $F(s) = \int f(t)e^{-st}dt$

$$e^{-st} = e^{-(\sigma + j\omega)t}$$

•Constante: $c=ae^{0t}$
•Senoidal: $\sin=(e^{jwt}-e^{-jwt})/2j$
•Exponencial: e^{at}
•Exponencial variando: $e^{at}.\cos(wt)$

  - Por que usar Laplace?

$$a_2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

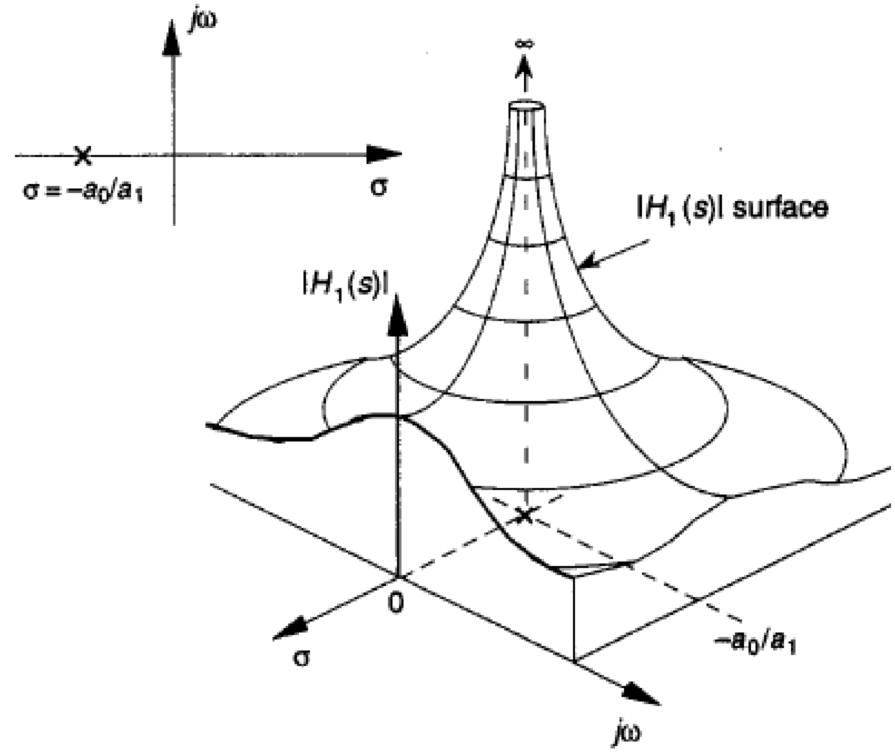
$$a_2 s^2 y(e^{st}) + a_2 s^2 y(e^{st}) = b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

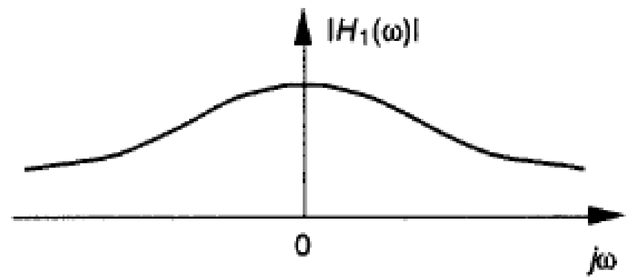
$$H(s) = \frac{y(e^{st})}{x(e^{st})} = \frac{b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

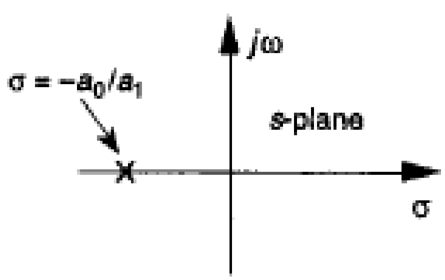
- Transformada de Fourier

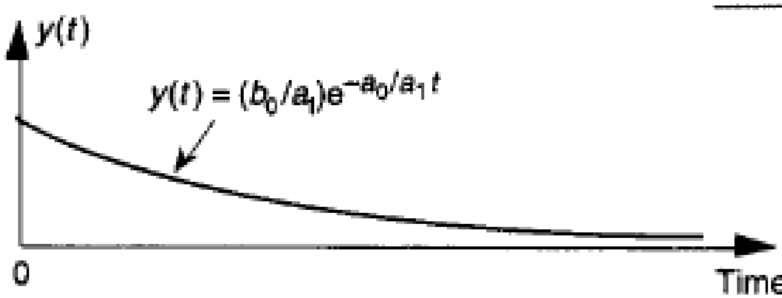
  Ex.:

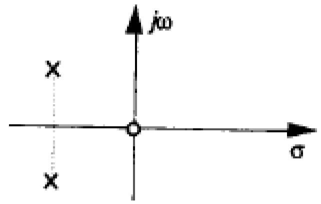
$$H(s)=\frac{b_0}{a_1 s+a_0}=\frac{b_0/a_1}{s+a_0/a_1}$$

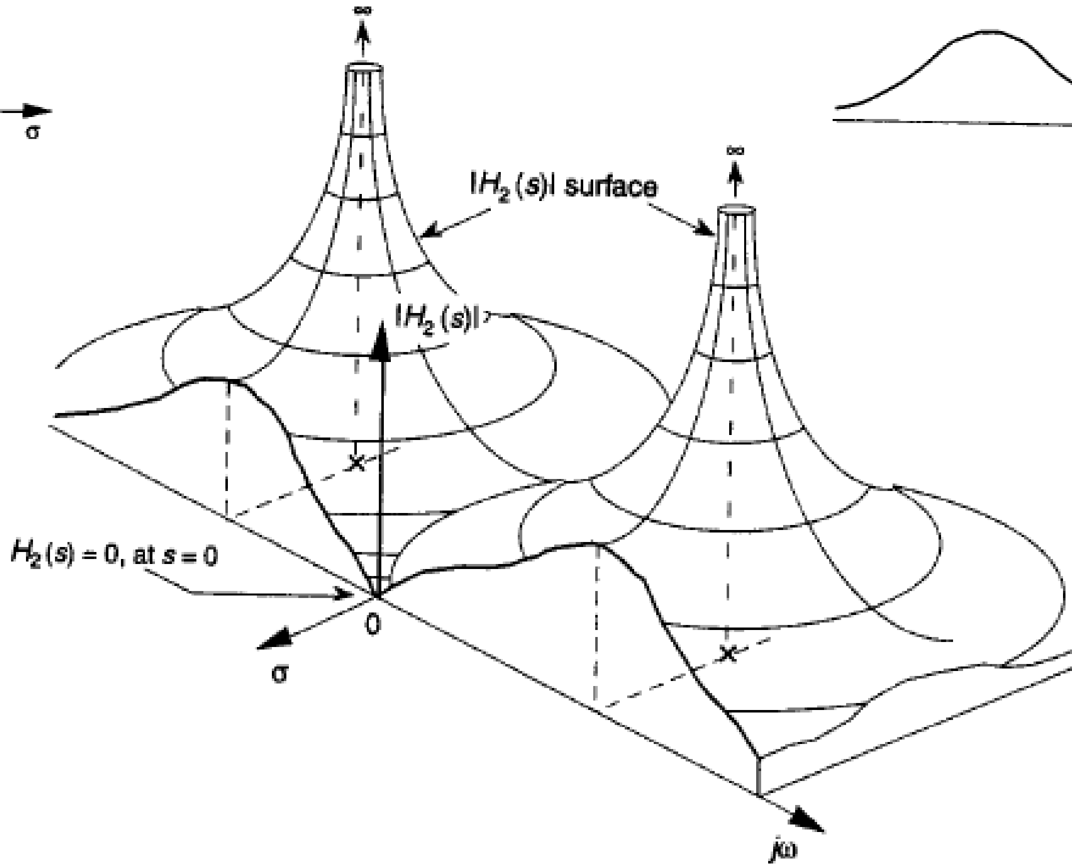


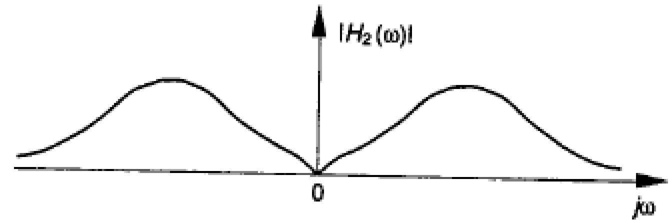


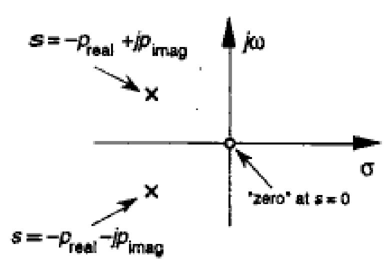


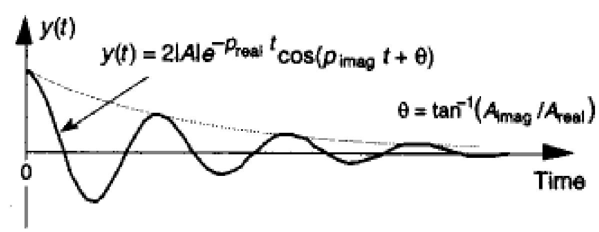


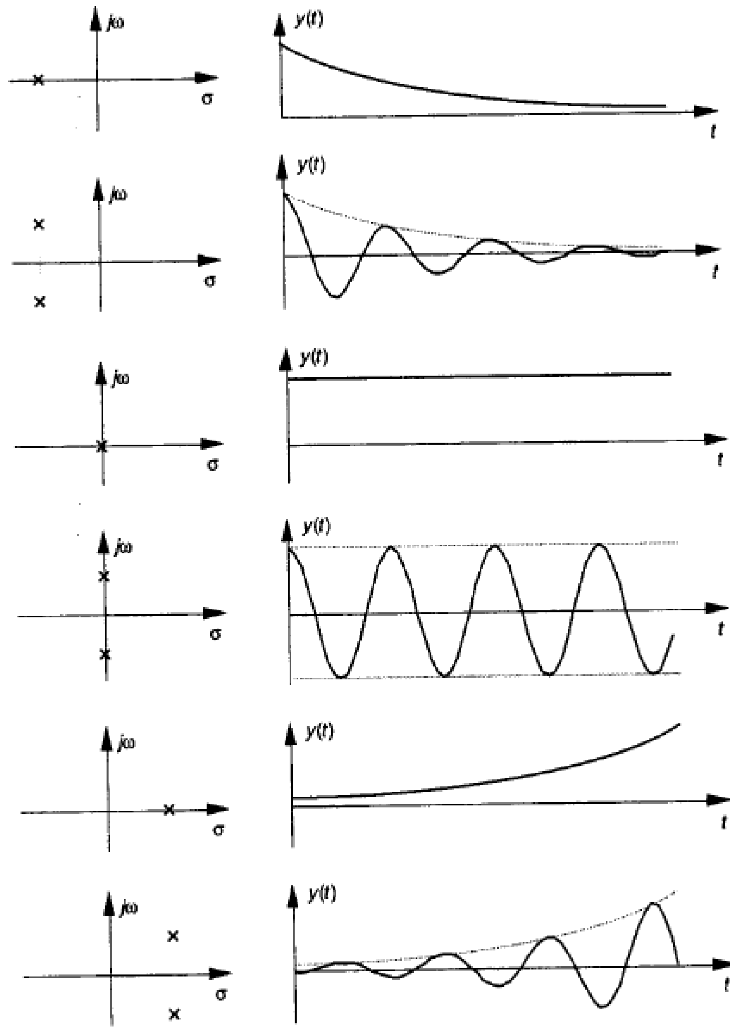

jω
σ

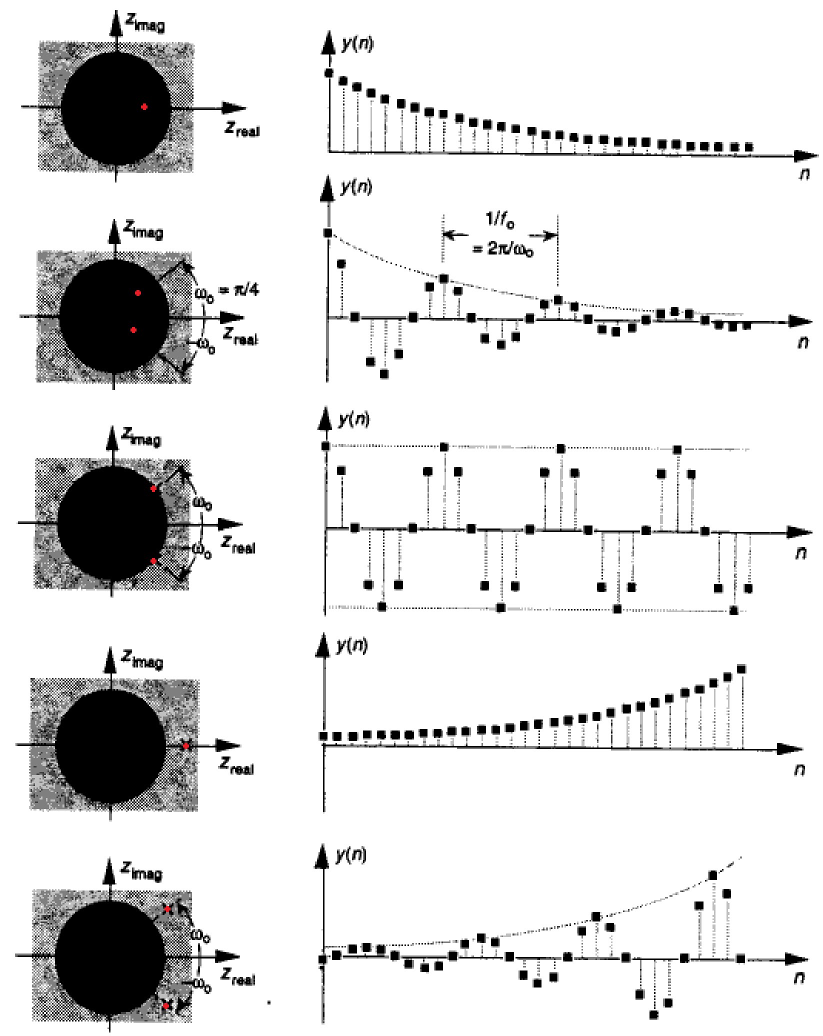

∞
|H2(s)| surface
∞
|H2(s)|
H2(s) = 0, at s = 0
0
σ
jω

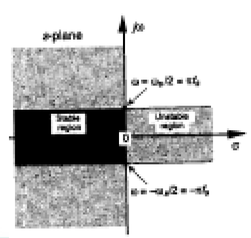

|H2(ω)|
0
jω

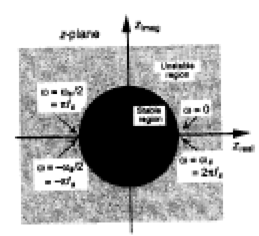

s = −preal + jpimag
jω
σ
"zero" at s = 0
s = −preal − jpimag


y(t)
y(t) = 2|A|e^(−preal t)cos(pimag t + θ)
θ = tan⁻¹(Aimag / Areal)
0
Time


jω
σ
y(t)
t


z_{imag}
z_{real}
y(n)
n
$1/f_o$
$= 2\pi/\omega_o$
$\omega_o = \pi/4$
ω_o
$-\omega_o$


s-plane
jω
Stable region
Unstable region
σ


z-plane
z_{imag}
Unstable region
Stable region
z_{real}

4) Invariância ao impulso

- "Digitalização do modelo analógico" com T
  - w = ΩT
- Passos:
  - a) coloque o filtro analógico na forma de frações parciais:

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{R_k}{s - p_k}$$

  - b) transformar os polos p_k em polos digitais $e^{p_k T}$ tais como

$$H(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{R_k}{1 - e^{p_k T} z^{-1}}$$

- Exemplo: transforme o filtro analógico abaixo em digital considerando T=0.1

$$H_a(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6}$$

Solução:

Convertendo em frações parciais

$$H_a(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6} = \frac{2}{s+3} - \frac{1}{s+2}$$

Os polos p_1=-3 e p_2=-2 considerando T=0.1 geram:

$$H(z) = \frac{2}{1-e^{-3T}z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-2T}z^{-1}} = \frac{1-0.8966z^{-1}}{1-1.5595z^{-1}+0.6065z^{-2}}$$

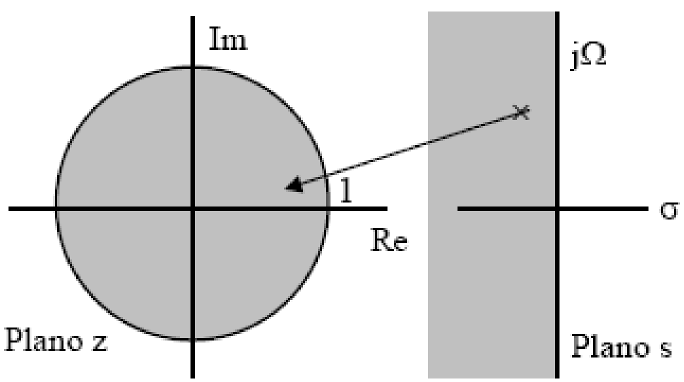
5) Transformação bilenear

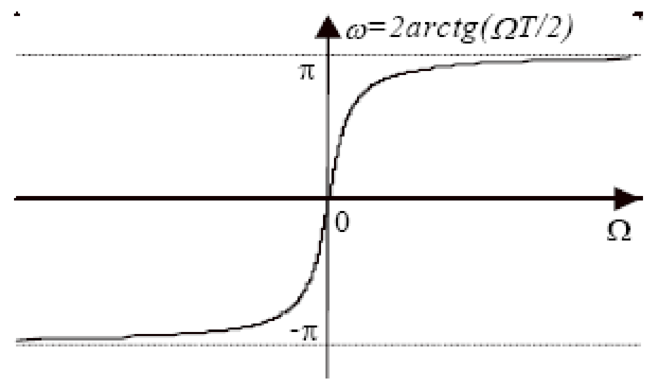
- Envolve um mapeamento do plano s para círculo z:

$$s = \frac{2}{T}\left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right)$$

- Mapeamento das frequências:

$$\Omega = \frac{2}{T} tg\left(\frac{w}{2}\right) \qquad w = 2tg^{-1}\left(\frac{\Omega T}{2}\right)$$





- Exemplo: transforme o filtro analógico abaixo em digital considerando T=1

$$H_a(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6}$$

Solução

Usando a relação:

$$H(z) = H_a\left(\frac{2}{T}\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\bigg|_{T=1}\right) = H_a\left(2\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$$

Aplicando a função:

$$= \frac{2\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+1}{\left(2\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2+5\left(2\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)+6}$$

Simplificando:

$$H(z) = \frac{3+2z^{-1}-z^{-2}}{20+4z^{-1}} = \frac{0.15+0.1z^{-1}-0.05z^{-2}}{1+0.2z^{-1}}$$