Parte 1:

Aprendendo a trabalhar com frações parciais

Para trabalhar com frações parciais em Matlab, você tem que conhecer o funcionamento das seguintes funções: `roots`, `poly` e `residue`. Os pontos abaixo ilustram o funcionamento destas três funções de modo prático.

- **Ponto 1: encontrando as raízes de um polinômio.**

A função roots deve ser empregada para encontrar as raízes de um polinômio qualquer. Veja os exemplos:

a) Cálculo das raízes do polinômio $1s^2 + 3s + 2$ (ver linhas 2 e 3 do código 1.1)
b) Cálculo das raízes do polinômio $1s^3 + 2s^2 + 5s$ (ver linhas 4 e 5 do código 1.1)

Código 1.1 - Cálculo das raízes de um polinômio qualquer.
```
1   clc; clear;  %limpa as variáveis do ambiente e a tela do prompt
2   coeficientes1 = [1 3 2];
3   roots(coeficientes1)
4   coeficientes2 = [1 2 5 0];
5   roots(coeficientes2)
```

Pelos resultados, observamos que as raízes do primeiro polinômio são -2 e -1 e 0, -1+2i e -1 -2i para o Segundo polinômio.

Observe também que todos os coeficientes de um polinômio, inclusive os nulos, devem ser inseridos na função. Por exemplo, o polinômio $3s^3$ - 1s + 5 corresponde ao código `roots([3   0   –1   5])`.

Existe também a função que faz o contrário da roots: ou seja, ela recebe as raízes do polinômio e determina os índices daquele polinômio. Observe os dois exemplos e o correspondente código 1.2.

a) Identifique qual é o polinômio que tem as raízes -2 e -1 (ver linhas 2 e 3 do código 1.2)
b) Identifique qual é o polinômio que tem as raízes -1; 2+3i e 2-3i (ver linhas 2 e 3 do código 1.2)

Código 1.2 - Cálculo das raízes de um polinômio qualquer.
```
1   clc; clear;  %limpa as variáveis do ambiente e a tela do prompt
2   raizes1 = [-2 -1];
3   poly(raizes1)
4   raizes2 = [-1 2+3i 2-3i];
5   poly(raizes2)
```

O resultado é "ans = 1 3 2" que equivale a $1s^2 + 3s + 2$ e "ans = 1 -3 9 13" que equivale a $1s^3 - 3s^2 + 9s + 13$

- **Ponto 2: decompondo em frações parciais**

A decomposição de uma dada razão polinomial em frações parciais é feita usando a função residue. Para isto considere os três exemplos:

a) $\frac{2}{1s^2+3s+2}$
b) $\frac{2}{1s^3+5s^2+8s+4}$
c) $\frac{3}{s^3+2s^2+5s}$

Código 1.1 - Cálculo das raízes de um polinômio qualquer.

```
clc; clear;  %limpa as variáveis do ambiente e a tela do prompt
num1 = [2];
den1 = [1 3 2];
[n, r, c] = residue(num1, den1)
num2 = [2];
den2 = [1 5 8 4];
[n, r, c] = residue(num2, den2)
num3 = [3];
den3 = [1 2 5 0];
[n, r, c] = residue(num3, den3)
```

O resultado de a) é n = -2 2 r = -2 -1 e c = [0] o que implica dizer que:

$$\frac{2}{1s^2+3s+2} = [0] + \frac{-2}{(s-(-2))} + \frac{2}{(s-(-1))}$$

O resultado de b) é n = -2 -2 2 r = -2 -2 -1 e c = [0] o que implica dizer que:

$$\frac{2}{1s^3+5s^2+8s+4} = \frac{k_3}{\left(s-(-2)\right)^2} + \frac{k_2}{\left(s-(-2)\right)} + \frac{k_1}{\left(s-(-1)\right)} = \frac{-2}{\left(s-(-2)\right)^2} + \frac{-2}{\left(s-(-2)\right)} + \frac{2}{\left(s-(-1)\right)}$$

O resultado de c) é n = -0.3+0.15i; -0.3-0.15i; 0.6 r = -1+2i; -1-2i e 0 e c = [0] o que implica dizer que:

$$\frac{3}{s^3+2s^2+5s} = \frac{-0.3+0.15i}{\left(s-(-1+2i)\right)} + \frac{-0.3-0.15i}{\left(s-(-1-2i)\right)} + \frac{0.6}{s}$$

Observe que os 3 exemplos anteriores são os mesmos exemplos que são ilustrados em nosso livro texto.

Parte 2:

Uso de funções simbólicas para resolver Laplace

O uso de funções simbólicas é um poderoso recurso do Matlab que podem ajudar na análise de funções no domínio s. Os próximos pontos ilustram isto.

- **Ponto 1: cálculo de transformada de Laplace usando funções simbólicas**

  Para resolver Laplace, crie a expressão f da equação e as variáveis dependentes usando o termo 'syms' conforme exemplo do código 2.1.

Código 2.1 - Cálculo da transformada de Laplace de forma simbólica

```
clear; clc;
syms t
f = 8*t^2*cos(3*t+ pi/4);
laplace(f)
```

O resultado é

$$4\sqrt{2}\frac{6}{(s^2+9)^2}-\frac{24s^2}{(s^2+9)^3}-4\sqrt{2}\frac{6s}{(s^2+9)^2}-\frac{8s^3}{(s^2+9)^3}$$

Observe que o resultado não é o mais simplificado possível e é relativamente comum aparecer termos longos. Mesmo assim, é um importante recursos para resolução de equações de Laplace.

- **Ponto 2: cálculo da transformada inversa usando funções simbóicas**

  É também possível aplicar a transformada inversa de Laplace a um função no domínio s conforme se observa no código 2.2

Código 2.2 - Cálculo da transformada inversa de Laplace de forma simbólica

```
clear; clc;
syms s
C = 1/(s*(s+2))
C = ilaplace(C)
```

O resultado é 1/2 - exp(-2*t)/2 que equivale a:

$$\frac{1}{2}-\frac{e^{-2t}}{2}$$

Parte 3:

Emprego de Laplace: exemplos e interpretações

Esta parte tem a função de ilustrar algumas das aplicações da transformada de Laplace. Ainda, são feitas algumas importantes interpretações com o objetivo do estudante entender a importância desta poderosa informação.

➢ Ponto 1: Laplace para modelam de circuitos com Amp. Op.

Considere o circuito da Figura 3.1.

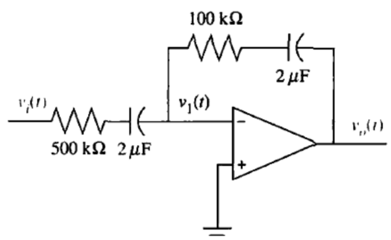

Figura 3.1 – Circuito eletrônico envolvendo um Amp. Op.

Se aplicarmos a modelagem de Laplace, a expressão abaixo indica a função de transferência do circuito.

$$H(s) = \frac{-0.2s - 2}{1s + 2} \tag{1}$$

A partir desta expressão, podemos usar algumas funções do Matlab para entender o que esta expressão no domínio ‘s’ pode dizer sobre o comportamento deste circuito. Para isto, considere o código 3.1. Este código mostro como é a topologia da superfície ‘s’ correspondente a função H(s). Neste caso, s=x+yi e x e y foram ‘varridos’ no intervalo de -4 a 4 com incrementos de 0.05.

Código 3.1 – Código para avaliar a função transferência do circuito da Figura 3.1

```
clear; clc; close all;
num = -[0.2 -2];
den = [1 2];
[x, y] = meshgrid(-4:0.05:4);
z = x+y*j;
res = (polyval(num, z))./(polyval(den,z));
surf(x,y, abs(res)); xlabel('real'); ylabel('imag'); zlabel('H');
```

Se consideramos que s=0+yi, ou seja, desconsideramos a parte real, lembrando que y=2πf. Assim, se adicionarmos ao código anterior as linhas 8 e 9 conforme mostra o código 3.2, teremos como saída o gráfico da Figura 3.2.

Código 3.2 – Código para gerar a resposta em frequência do circuito.

```
1   clear; clc; close all;
2   num = -[0.2 -2];
3   den = [1 2];
4   [x, y] = meshgrid(-4:0.05:4);
5   z = x+y*j;
6   res = (polyval(num, z))./(polyval(den,z));
7   surf(x,y, abs(res)); xlabel('real'); ylabel('imag'); zlabel('H');
8   figure;
9   [ampli, freque] = freqs(num,den);
```

```
10 plot(freque./(2*pi),      abs(ampli))
```

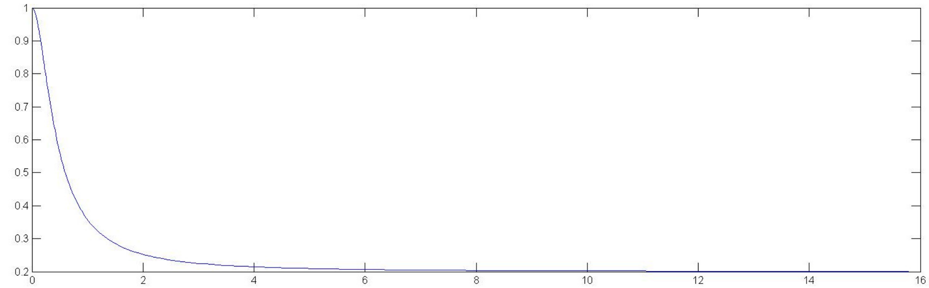

Figura 3.2 – Resposta em frequência da Equação (1). O eixo horizontal, por ter sido dividido por 2π (ver linha 10 do código), está em Hertz. O eixo vertical indica a magnitude e é adimensional.

Agora para tentar entender o que isto significa, você deve considerar os seguintes casos:

a) Inserir no circuito da Figura 3.1 um sinal ‘puro’ cuja frequência seja de 0,2Hz
b) Inserir no circuito da Figura 3.1 um sinal ‘puro’ cuja frequência seja de 0,6Hz
c) Inserir no circuito da Figura 3.1 um sinal ‘puro’ cuja frequência seja de 1,4Hz
d) Inserir no circuito da Figura 3.1 um sinal ‘puro’ cuja frequência seja de 10Hz.

Para descobrir a saída, temos que fazer:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

$$Y(s) = H(s).X(s)$$

Temos a expressão para a função transferência H(s) que é dada pela Equação (1). Assim, devemos pegar os sinais de entrada x(t) e convertê-los em X(s). Ao final, temos que fazer s=0+2πfi e achar o módulo de Y(s) para este valor. Ele deve ser similar ao mostrado no gráfico da Figura 3.2 para o valor especifico de f.

- **Ponto 2: Laplace para modelam de sistemas mecânicos**

Considere que um sistema de mola e amortecedor de um carro podem ser esquematicamente representados pelo modelo da Figura 3.3.

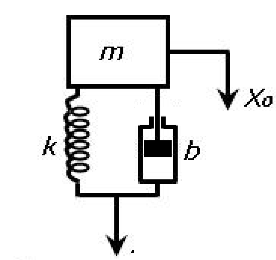

Figura 3.3 – Modelo mecânico para amortecimento de um veículo.

Se aplicarmos a modelagem de Laplace, a expressão abaixo indica a função de transferência do sistema de amortecimento de impacto designado pela força F. Este impacto causa um deslocamento x_0 no veículo que deve ser o menor possível e deve decrementar com o tempo absorvendo a energia do impacto sem tirar a estabilidade do veículo.

$$H(s) = \frac{X_0(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + bs + k} \tag{2}$$

Considere que para este projeto, foram designados os parâmetros M = 800kg, b=40N-s/m e k=50N/m. Como este sistema se comporta em caso de um impacto de força de 1N?

Para avaliar isto, teremos que ver o que acontece com o sistema (sua oscilação X_0) quando o sistema é submetido a este impacto. Neste exemplo, vamos considerar que o impacto tem a forma de uma função **δ**, tal que F= **δ**(t). Desta forma, sabendo que a função **δ**(t) é no domínio de Laplace equivalente a 1 (ver tabelada), teremos:

$$\begin{gathered} X_0 = H(s).F(s) = \frac{1}{Ms^2 + bs + k}.1 \\ X_0(s) = \frac{k_1}{(s-p_1)} + \frac{k_2}{(s-p_2)} \end{gathered} \tag{3}$$

Considerando os valores de M, b e k, teremos as frações parciais:

$$X_0(s) = \frac{-0.0025i}{(s + 0.025 - 0.2487i)} + \frac{0.0025i}{(s + 0.025 + 0.2487i)}$$

Se aplicarmos a transformada inversa de Laplace, pela tabelada, teremos:

$$x_0(t) = -0.0025i.e^{[(+0.025-0.2487i).t]} + 0.0025i.e^{[(+0.025+0.2487i).t]}$$

Esta expressão indica como o sistema irá se comportar no tempo considerando um impacto como o especificado anteriormente. Se plotarmos esta expressão no tempo veremos o gráfico:

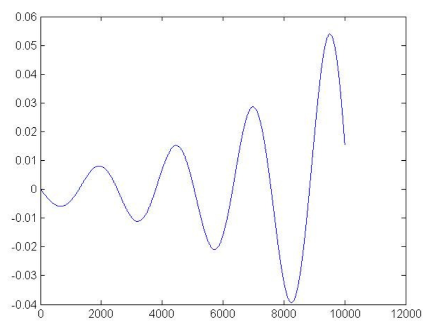

Figura 3.4 – Comportamento do sistema de amortecimento para M = 800kg, b=40N-s/m e k=50N/m considerando um impacto de 1N no formado de uma função impulsiva. Eixo horizontal representando tempo (dado em segundos) e vertical representando o deslocamento (em metros).

O Código 3.3 ilustra as instruções em Matlab usadas para gerar o gráfico Figura 3.4.

Código 3.3 – Código usado para mostrar o comportamento da função de amortecimento no tempo.

```
clear; clc; close all;
M = 800;
b = 40;
k = 50;
num = [1];
den = [M b k];
[r,p,k] = residue(num, den)
t=0:0.01:100;
sistema = r(1)*exp(-p(1)*t) + r(2)*exp(-p(2)*t);
plot((sistema))
```