Capítulo 1*:

Transformada de Fourier em tempo contínuo

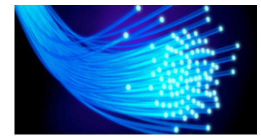
Prof. Alan Petrônio Pinheiro
Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Engenharia Elétrica
alanpetronio@ufu.br

**Baseado no capítulo 4 do livro texto: "Sinais e Sistemas" de Alan V. Oppenheim, 2ª edição.*

Representação da informação

- Eletricidade: informação x energia

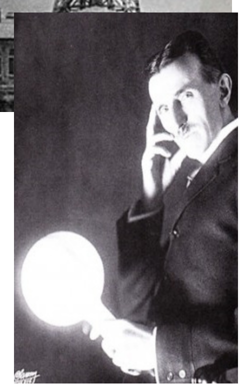
óptica

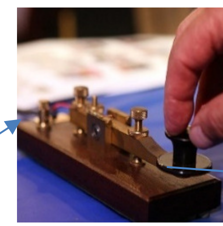


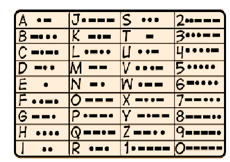
elétrica

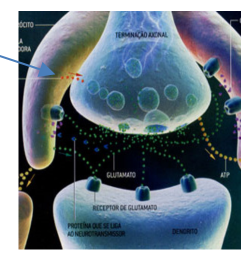
auditivo

visual



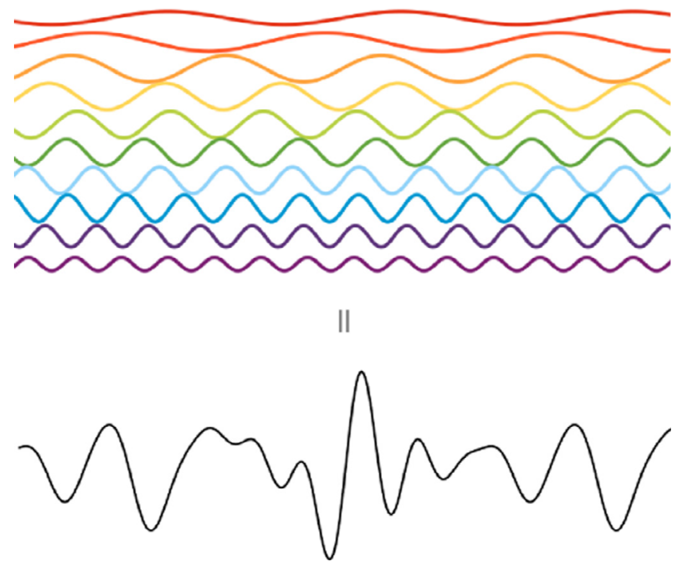


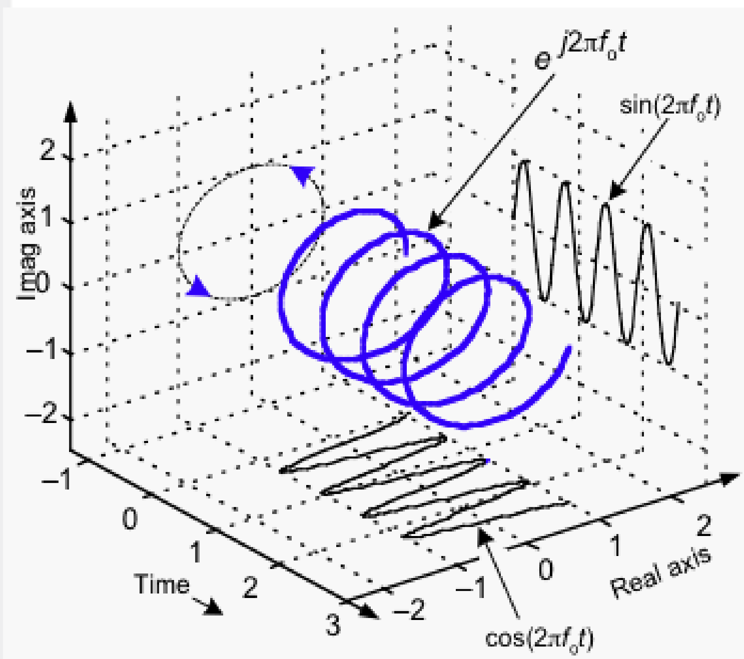


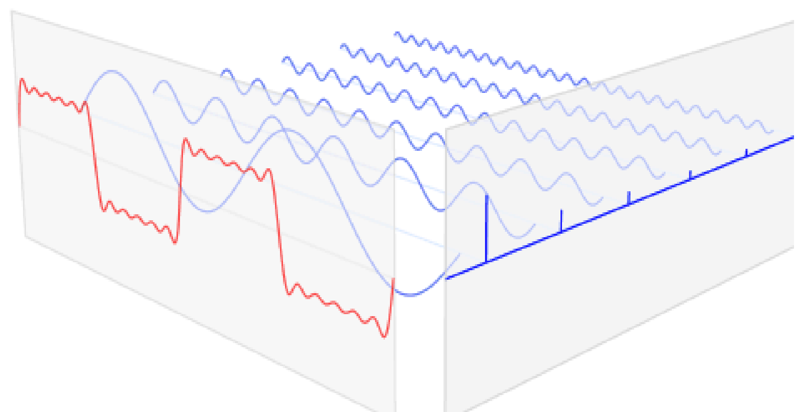


Sinais

- "Sinais são representados por uma combinação linear de sinais básicos"
  - Exponenciais complexas
    - $e^{jwt} = \cos(wt) + j.\sin(wt)$







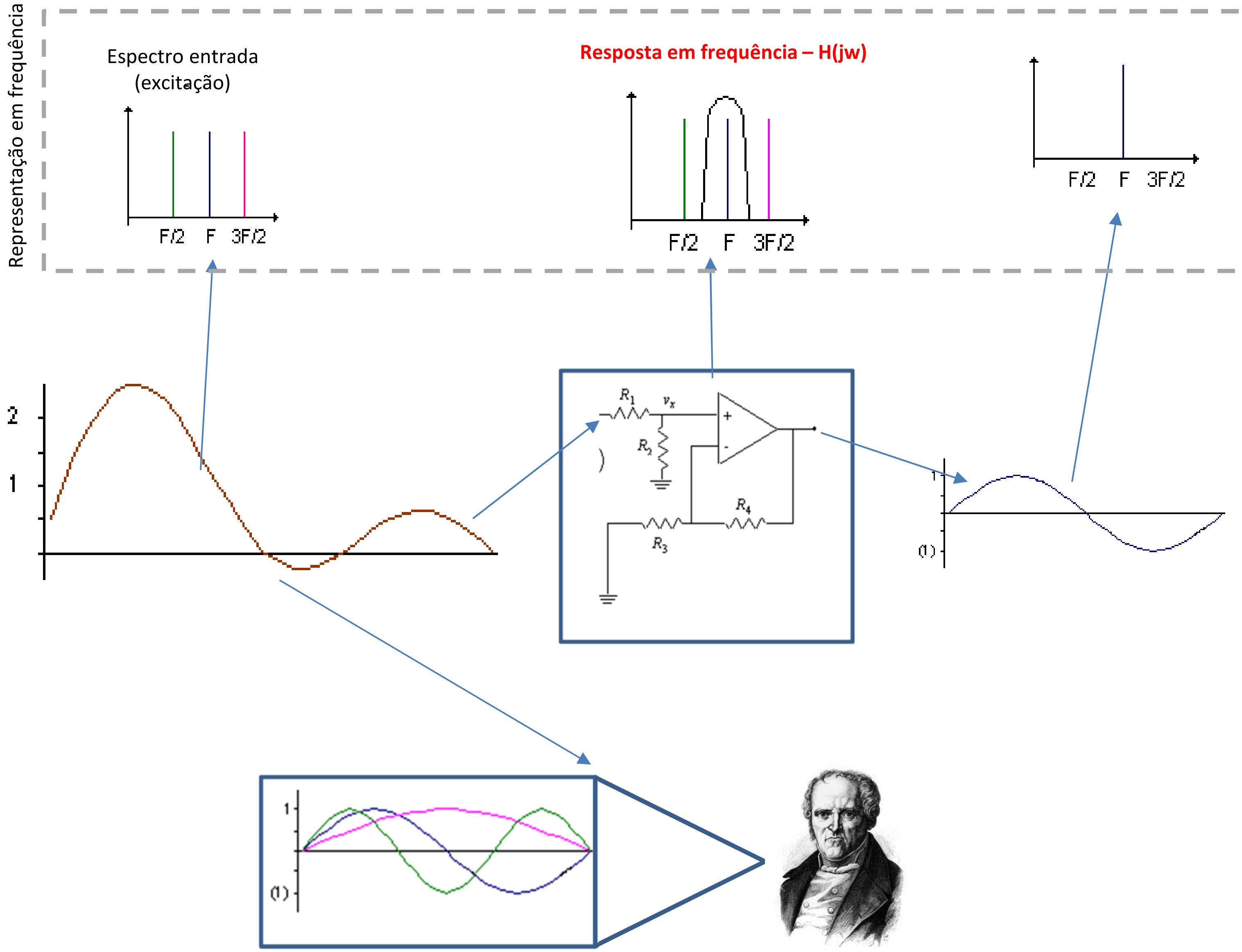
UFU
Prof. Alan
www.alan.eng.br

Sistemas

Sinais e Sistemas 2

Capítulo 1:
Transf. de Fourier em tempo contínuo

- **Representação informação**
- **Sinais**
- **Sistemas**
- **Introdução à teoria Fourier**
  - Teoria preliminar
  - Formulação
  - Fórmulas
  - Exemplos sinais importantes
- **Propriedades**
  - Linearidade
  - Deslocamento tempo
  - Convolução
  - Multiplicação
  - Dualidade
  - Outras
  - Tabelas
- **Sist. Caracterizados por eq. diferenciais**
- **Exercícios**



Introdução à teoria de Fourier

- Fourier: série x transformada
  - **Série**
    - Só sinais periódicos
    - Sinais "harmonicamente" *somados*

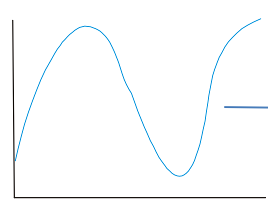
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t},$$

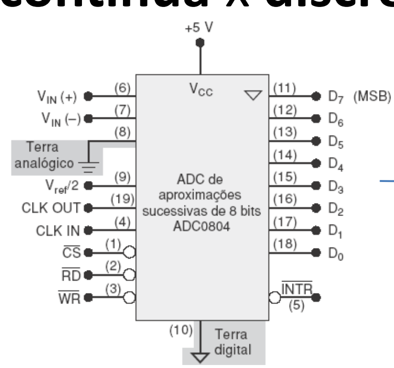
$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk(2\pi/T)t}\,dt.$$

  - **Transformada**
    - Frequências infinitesimais próximas (*integral*).
    - Sinais periódicos e aperiódicos também (classe mais ampla de sinais, mas não a todos)

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega}$$

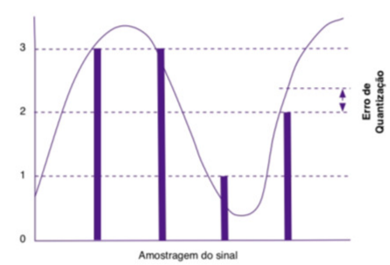
- Transformada **contínua** x **discreta**





memória

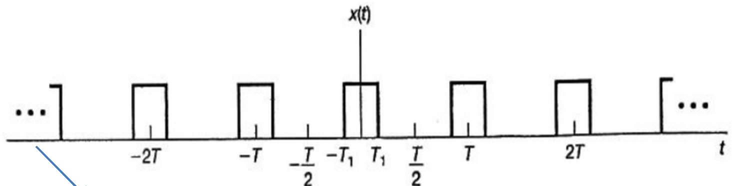
01	*n=0*
11	*n=1*
11	*n=2*
01	*n=3*
10	*n=4*



- **Formulação** da hipótese de Fourier

"Fourier intuiu que um sinal aperiódico pode ser visto como um sinal periódico com período infinito"

Lembrando da série de Fourier que:

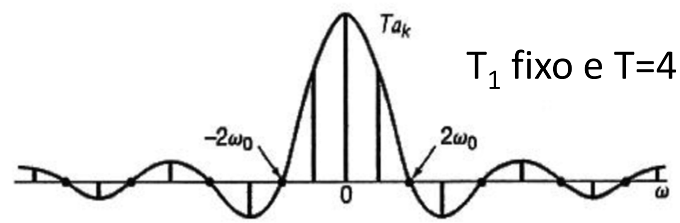


$$a_k = \frac{2\,\text{sen}(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T}, \quad \rightarrow \quad Ta_k = \frac{2\,\text{sen}\,\omega T_1}{\omega}\Big|_{\omega=k\omega_0}.$$

$$\boxed{a_k} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \boxed{\frac{1}{T}}\,\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt}$$

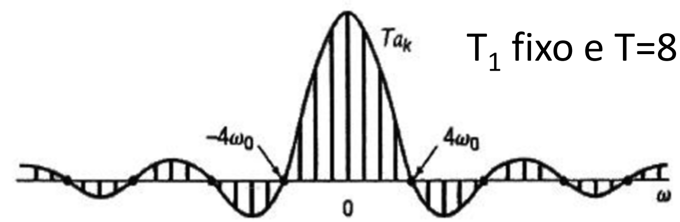
$$a_k = \frac{1}{T}X(jk\omega_0).$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt,$$



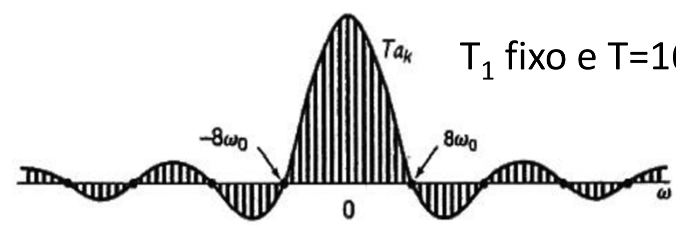
(a)

T_1 fixo e $T=4.T_1$



(b)

T_1 fixo e $T=8.T_1$



(c)

T_1 fixo e $T=16.T_1$

- Fórmulas:

Análise – X(jw)

$$\boxed{X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt}$$

Síntese – x(t)

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega}$$

Demonstração

$$a_k = \frac{1}{T}X(jk\omega_0).$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt,$$

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T}X(jk\omega_0)\,e^{jk\omega_0 t},$$

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}\omega_0.$$

Quando $T \rightarrow \infty$, $w_0 \rightarrow 0$

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega}$$

- Observações quanto a formulação:
  - A transformada tem que ter convergência
    - x(t) seja integrável

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt < \infty .$$

    - x(t) tenha número finito de máximos e mínimos em qualquer intervalo finito
    - x(t) tenha número finito de descontinuidades e elas devem ser finitas

Sinais e Sistemas 2

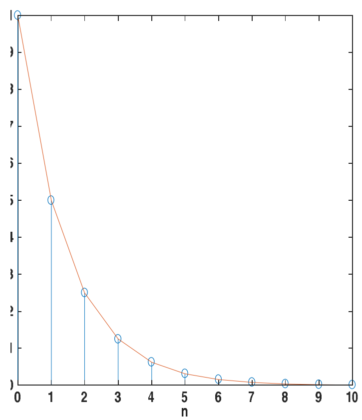
Capítulo 1:
Transf. de Fourier em tempo contínuo

- Calcule a TFTC dos sinais abaixo:

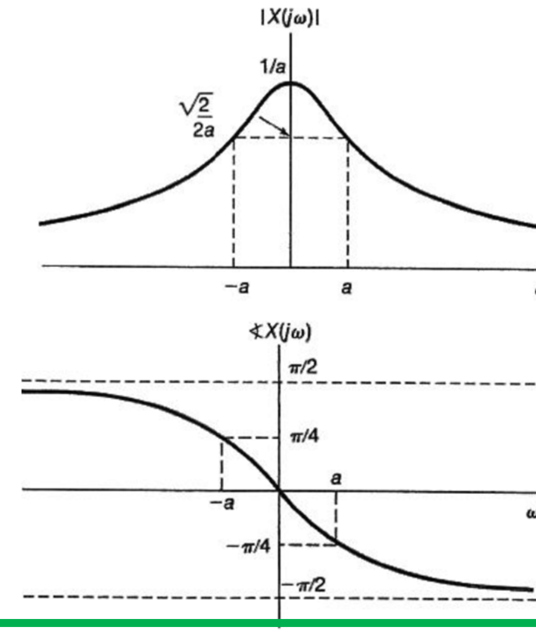
Observação: estes sinais são muito recorrentes!

Sinal 1)

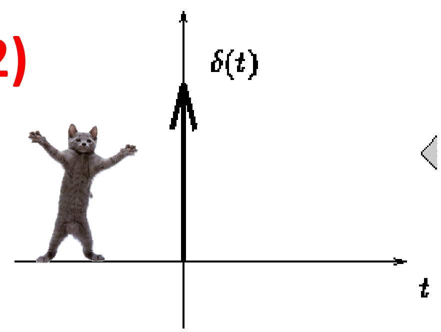
$$x(t) = e^{-at}u(t) \quad a > 0.$$



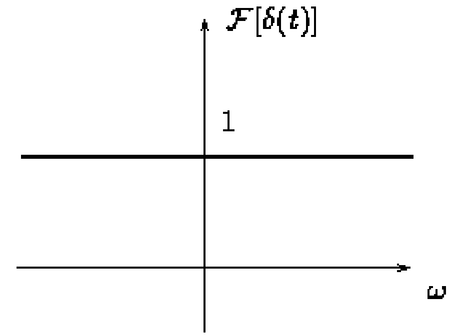
Resposta



Sinal 2)



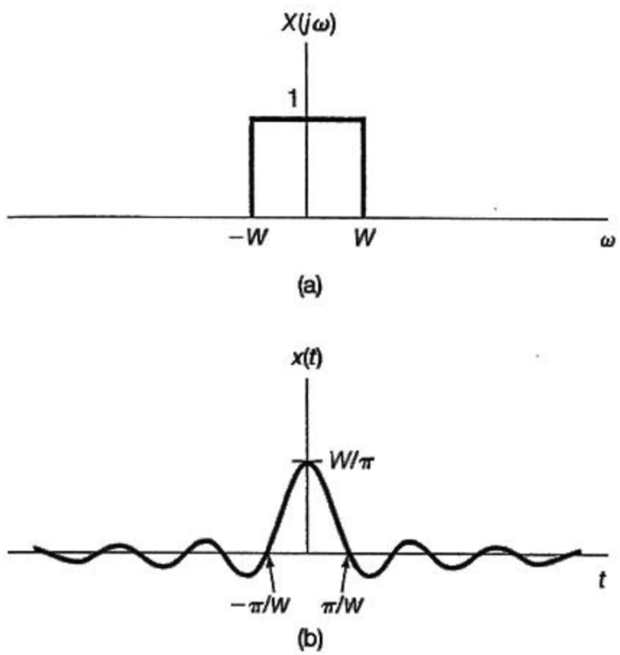
Resposta



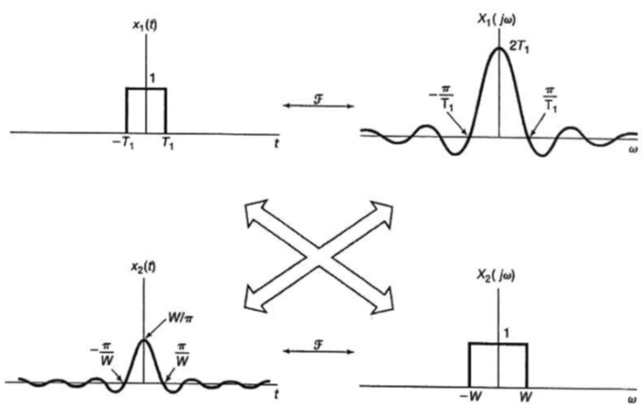
Sinal 3)

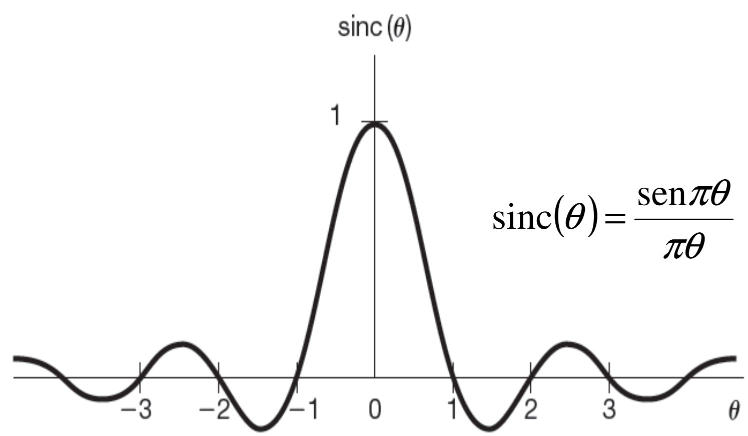
$$X(j\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|<W\\ 0, & |\omega|>W\end{cases}.$$

Resposta



- Deste exemplo podemos já tirar uma importante propriedade da TF





$$\mathrm{sinc}(\theta)=\frac{\mathrm{sen}\,\pi\theta}{\pi\theta}$$

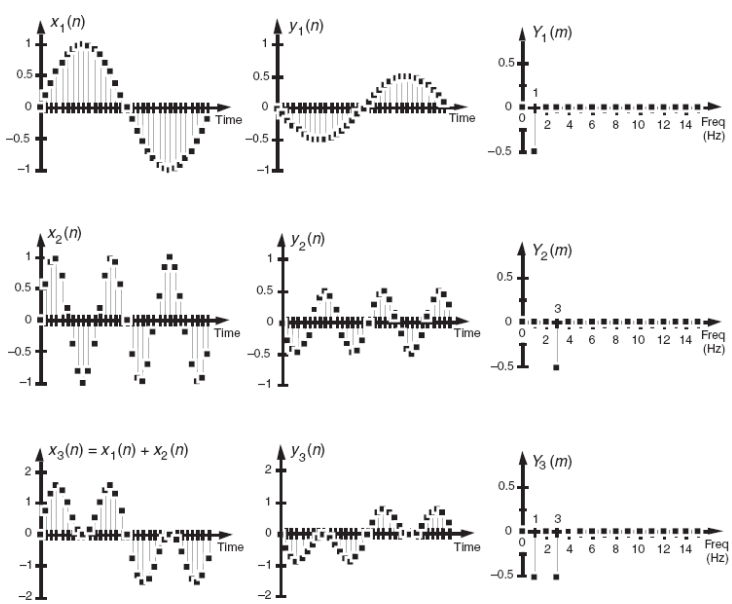
Propriedades

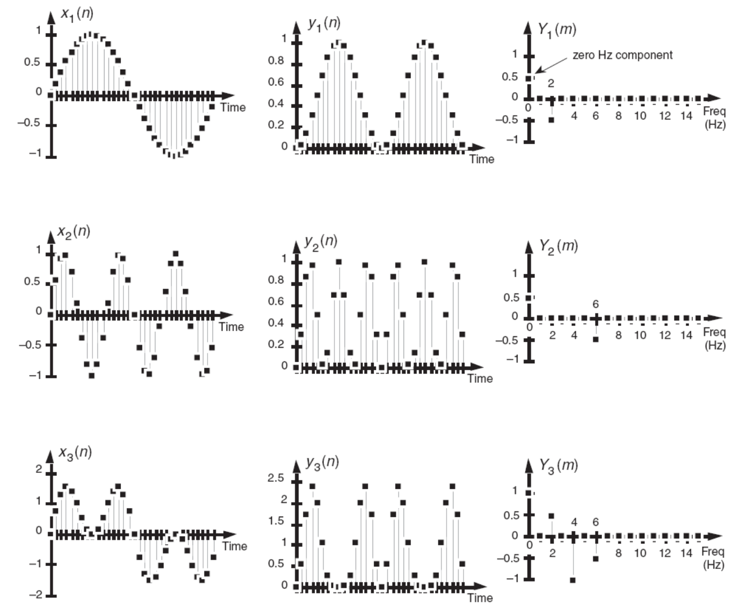
• 1) Linearidade

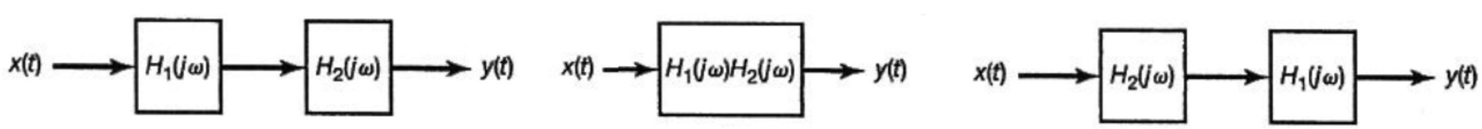
$$x(t) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X(j\omega)$$

$$y(t) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} Y(j\omega),$$

$$\boxed{ax(t)+by(t) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} aX(j\omega)+bY(j\omega).}$$





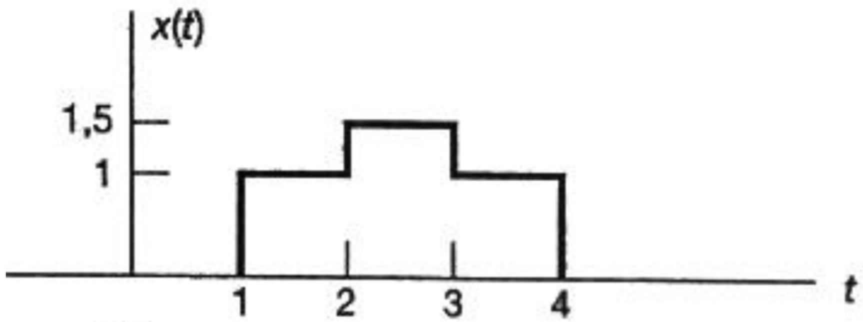


• 2) Deslocamento no tempo

$$x(t) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X(j\omega),$$

$$\boxed{x(t-t_0) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} e^{-j\omega t_0} X(j\omega).}$$

Exemplo: qual a TFTC do sinal abaixo?

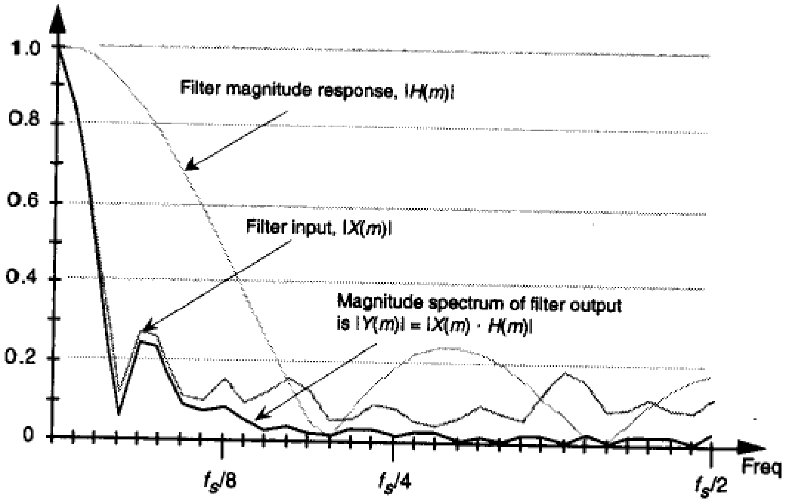


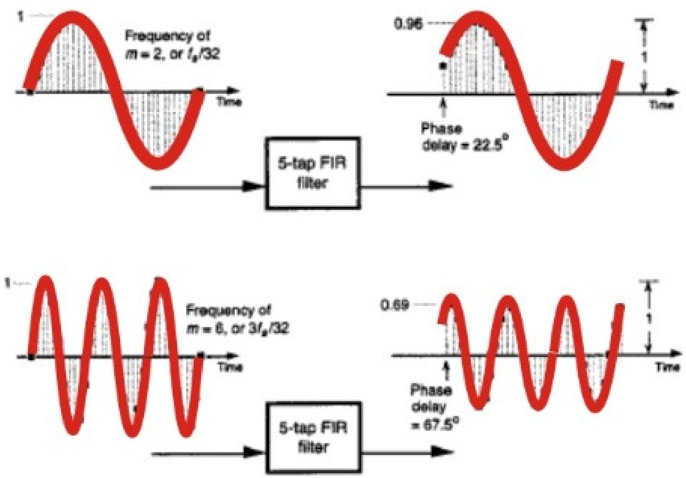
• 3) Convolução

$$\boxed{y(t) = h(t) * x(t) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega).}$$

$$\boxed{H(jk\omega_0)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \boxed{h(t)} e^{-jk\omega_0 t}\, dt.$$

Resposta em frequência — **Resposta impulsiva**

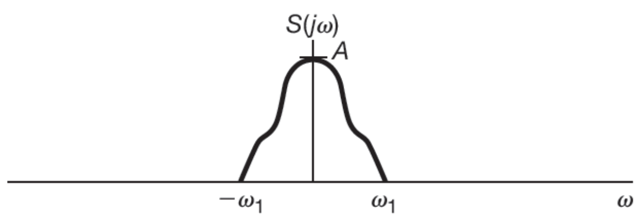




• 4) Multiplicação

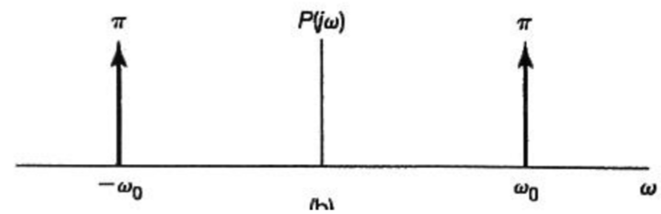
$$\boxed{r(t) = s(t)p(t) \longleftrightarrow R(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[S(j\omega) * P(j\omega)\right].}$$

Ampla aplicação quando 1 dos multiplicandos é “puro”



(a)

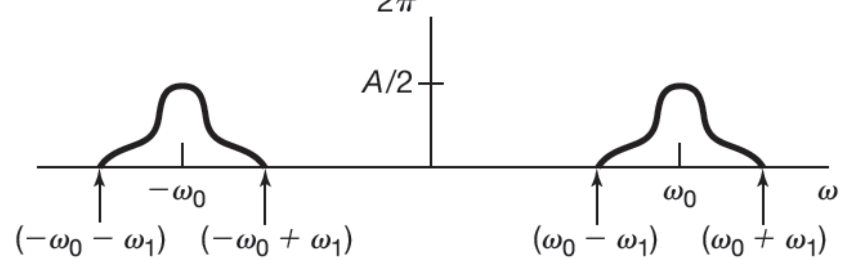
$$p(t) = \cos \omega_0 t X_1, \ldots, X_n .$$



(b)

$$P(j\omega) = \pi\delta(\omega-\omega_0) + \pi\delta(\omega+\omega_0)$$

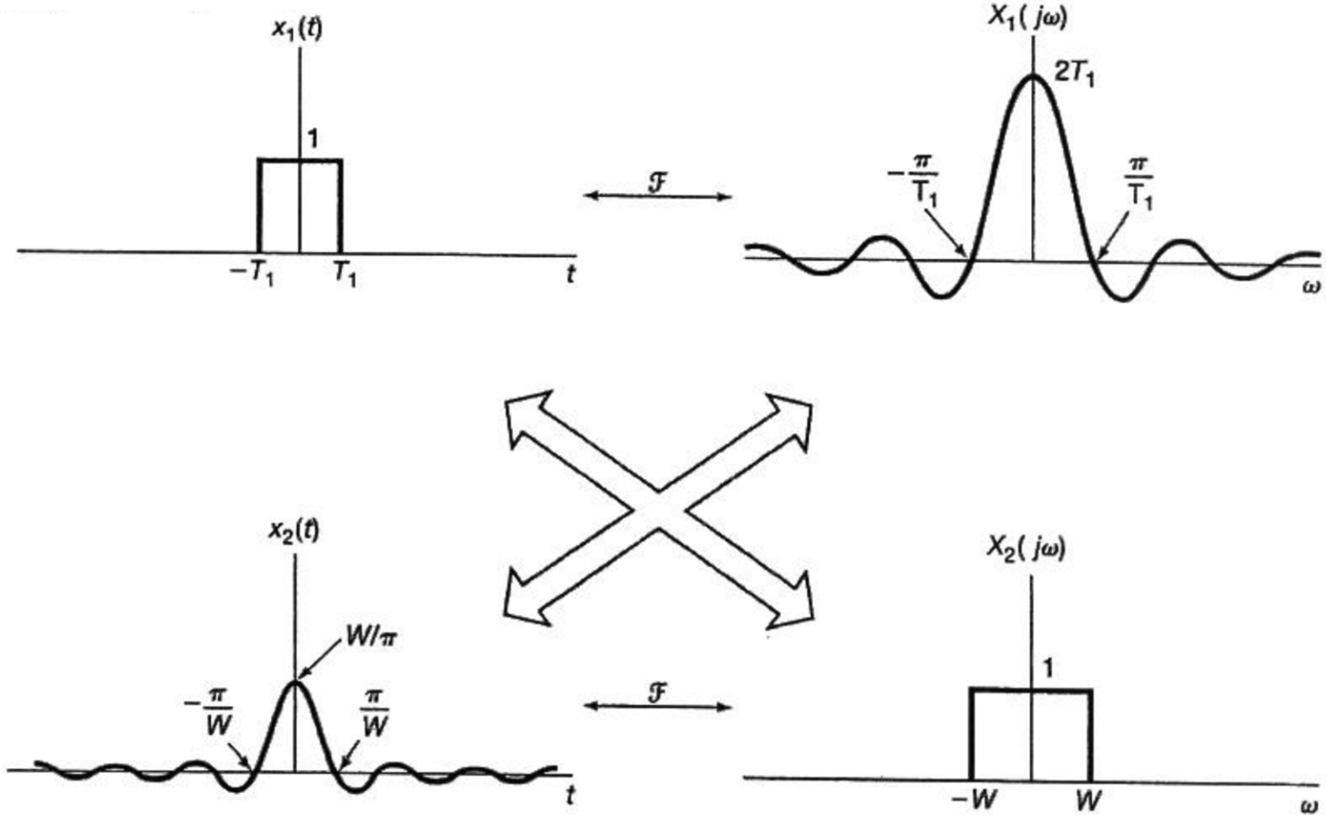
$$R(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[S(j\omega) * P(j\omega)\right]$$



$$\begin{aligned} R(j\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(j\theta)P(j(\omega-\theta))\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}S(j(\omega-\omega_0)) + \frac{1}{2}S(j(\omega+\omega_0)). \end{aligned}$$

• 5) Dualidade

$$x_1(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases} \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X_1(j\omega) = \frac{2 \operatorname{sen} \omega T_1}{\omega},$$



$$x_2(t) = \frac{\operatorname{sen} Wt}{\pi t} \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X_2(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}.$$

- **Outras diversas:**
  - A) Conjugação e simetria

$$x(t) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X(j\omega),$$

$$\boxed{x^*(t) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X^*(-j\omega).}$$

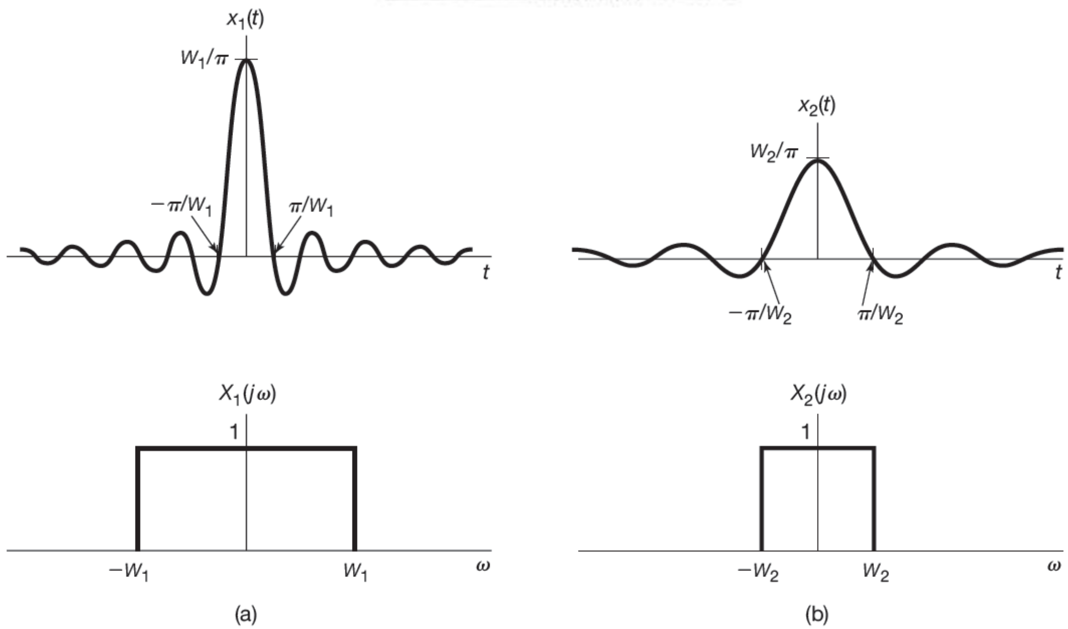
  - B) Diferenciação e integração

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} j\omega X(j\omega)e^{j\omega t}\,d\omega.$$

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} j\omega X(j\omega).}$$

– C) Mudança de escala no tempo

$$\boxed{x(at) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right),}$$



– D) Parseval

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2\, d\omega.}$$

Seção	Propriedade	Sinal aperiódico	Transformada de Fourier
		$x(t)$	$X(j\omega)$
		$y(t)$	$Y(j\omega)$
4.3.1	Linearidade	$ax(t)+by(t)$	$aX(j\omega)+bY(j\omega)$
4.3.2	Deslocamento no tempo	$x(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$
4.3.6	Deslocamento em frequência	$e^{j\omega_0 t}x(t)$	$X(j(\omega-\omega_0))$
4.3.3	Conjugação	$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$
4.3.5	Reflexão no tempo	$x(-t)$	$X(-j\omega)$
4.3.5	Mudança de escala no tempo e na frequência	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
4.4	Convolução	$x(t)*y(t)$	$X(j\omega)Y(j\omega)$
4.5	Multiplicação	$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\theta)\ \ Y(j(\omega-\theta))d\theta$
4.3.4	Diferenciação no tempo	$\frac{d}{dt}x(t)$	$j\omega X(j\omega)$
4.3.4	Integração	$\int_{-\infty}^{t}x(t)dt$	$\frac{1}{j\omega}X(j\omega)+\pi X(0)\delta(\omega)$
4.3.6	Diferenciação em frequência	$tx(t)$	$j\frac{d}{d\omega}X(j\omega)$

4.3.3	Simetria conjugada para sinais reais	$x(t)$ real	$\begin{cases} X(j\omega) = X^*(-j\omega) \\ \mathcal{R}e\{X(j\omega)\} = \mathcal{R}e\{X(-j\omega)\} \\ \mathcal{I}m\{X(j\omega)\} = -\mathcal{I}m\{X(-j\omega)\} \\ \lvert X(j\omega)\rvert = \lvert X(-j\omega)\rvert \\ \sphericalangle X(j\omega) = -\sphericalangle X(-j\omega) \end{cases}$
4.3.3	Simetria para sinais reais e pares	$x(t)$ real e par	$X(j\omega)$ real e par
4.3.3	Simetria para sinais reais e ímpares	$x(t)$ real e ímpar	$X(j\omega)$ puramente imaginário e ímpar
4.3.3	Decomposição par-ímpar para sinais reais	$x_e(t) = \mathcal{E}v\{x(t)\}$ [$x(t)$ real] $x_o(t) = \mathcal{O}d\{x(t)\}$ [$x(t)$ real]	$\mathcal{R}e\{X(j\omega)\}$ $j\mathcal{I}m\{X(j\omega)\}$
4.3.7	Relação de Parseval para sinais aperiódicos		

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

Sinal	Transformada de Fourier	Coeficientes da série de Fourier (se periódica)
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$	a_k
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$	$a_1 = 1$ $a_k = 0$, caso contrário
$\cos \omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$	$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$ $a_k = 0$, caso contrário
$\text{sen}\ \omega_0 t$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$	$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2j}$ $a_k = 0$, caso contrário
$x(t) = 1$	$2\pi\delta(\omega)$	$a_0 = 1, \quad a_k = 0, \quad k \neq 0$ (esta é a representação em série de Fourier para qualquer escolha de $T > 0$)
Onda quadrada periódica $x(t) = \begin{cases} 1, & \lvert t\rvert < T_1 \\ 0, & T_1 < \lvert t\rvert \leq \frac{T}{2} \end{cases}$ e $x(t+T) = x(t)$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\ \text{sen}\ k\omega_0 T_1}{k} \delta(\omega - k\omega_0)$	$\frac{\omega_0 T_1}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi}\right) = \frac{\text{sen}\ k\omega_0 T_1}{k\pi}$
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$	$a_k = \frac{1}{T}$ para todo k
$x(t) = \begin{cases} 1, & \lvert t\rvert < T_1 \\ 0, & \lvert t\rvert > T_1 \end{cases}$	$\frac{2\ \text{sen}\ \omega T_1}{\omega}$	—

Sinais e Sistemas 2

Capítulo 1:
Transf. de Fourier em tempo contínuo

$\frac{\text{sen } Wt}{\pi t}$	$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & \lvert\omega\rvert < W \\ 0, & \lvert\omega\rvert > W \end{cases}$	—
$\delta(t)$	1	—
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$	—
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$	—
$e^{-at}u(t), \Re e\{a\} > 0$	$\frac{1}{a + j\omega}$	—
$te^{-at}u(t), \Re e\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^2}$	—
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t),$ $\Re e\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^n}$	—

Sistemas caracterizados por equações diferenciais

- Sistemas no tempo regidos por equações como:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

- Na frequência viram: $Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$ $\qquad H(j\omega) = \dfrac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$

$$\mathfrak{F}\left\{\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\} = \mathfrak{F}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}\right\}. \rightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k \mathfrak{F}\left\{\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\} = \sum_{k=0}^{M} b_k \mathfrak{F}\left\{\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right\} \rightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k Y(j\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k X(j\omega),$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}.$$

- Exemplo: considere o sistema LIT estável caracterizado pela equação abaixo. Estime sua resposta em frequência e resposta ao impulso unitário

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

Exercícios

- Sugestões de vídeos “complementares”:
  - Fourier Transform, Fourier Series, and frequency spectrum
    - Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=r18Gi8lSkfM
  - But what is the Fourier Transform? A visual introduction
    - Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=spUNpyF58BY&t=984s

- Exercícios:
  - Ver seção “capítulo 1” da “lista 1” disponível no site da disciplina.