Capítulo 2*:

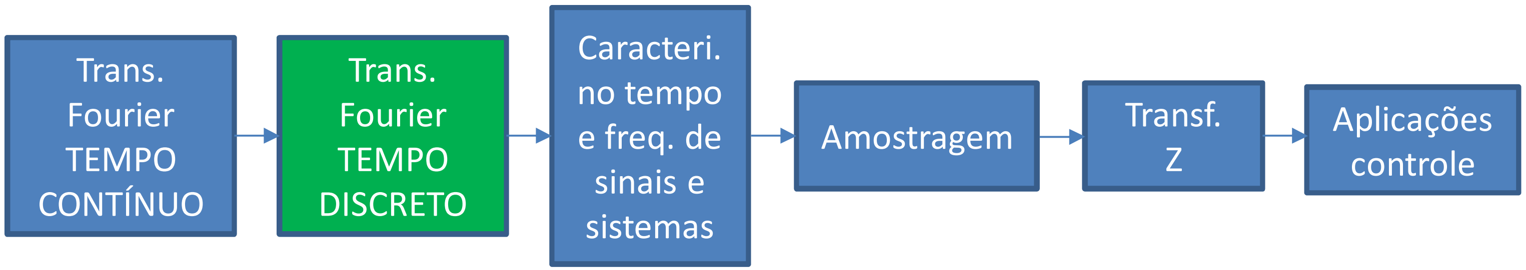
Transformada de Fourier em tempo discreto

Prof. Alan Petrônio Pinheiro
Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Engenharia Elétrica
alanpetronio@ufu.br

**Baseado no capítulo 5 do livro texto: "Sinais e Sistemas" de Alan V. Oppenheim, 2ª edição.*

Contexto

- Vamos relembrar a "big picture"



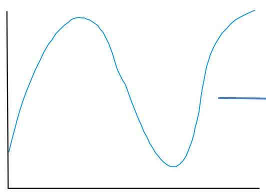
Introdução ao tempo discreto

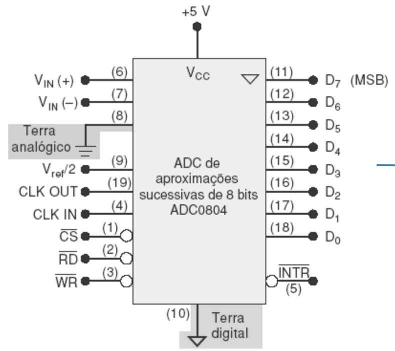
- "Cenas do capítulo passado ..."

$$\boxed{X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t}\, dt}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t}\, d\omega}$$

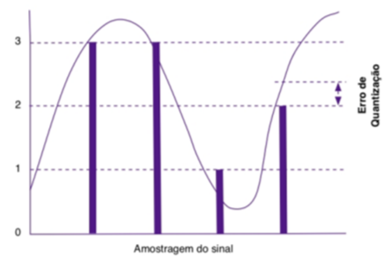
- Conceito de tempo discreto
  - Processo discretização:



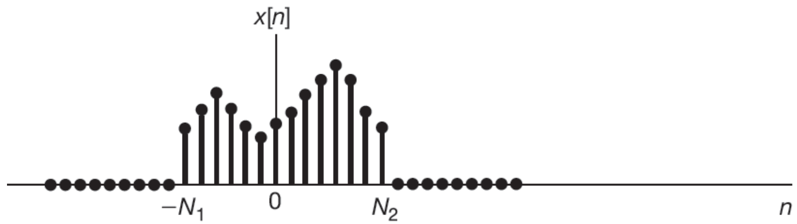


memória

01	*n=0*
11	*n=1*
11	*n=2*
01	*n=3*
10	*n=4*



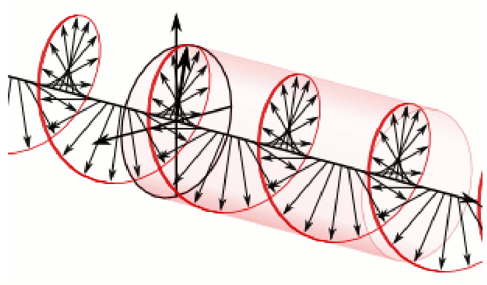
  - Representação:
  - Amostragem (Ts e Fs)
    - **t=n.Ts**



Formulação matemática TFTD

- Formulação matemática:

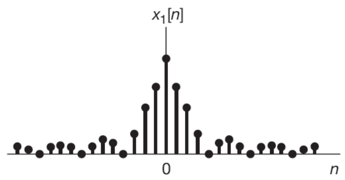
$$\boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}\,d\omega}$$ síntese

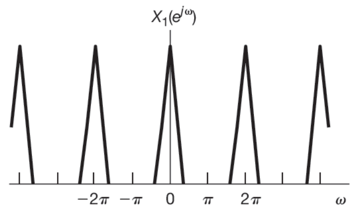


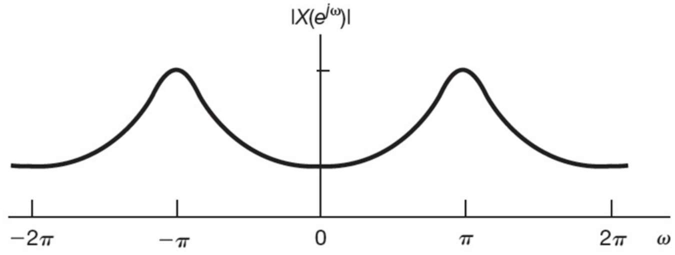
$$X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$ análise

- Diferença entre:
  - (i) série, → $a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk(2\pi/T)t}\,dt.$
  - (ii) TF em tempo contínuo → $\boxed{X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}\,dt}$
  - (iii) TF em tempo discreto → $X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$
  - (iv) transformada discreta de Fourier (DFT) → $X(m) = \sum_{n-0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi nm/N}$

- Característica importante do kernel discretizado:
  - $e^{j\omega n}$ é periódico a cada 2π (para mesmo n)
  - Isto quer dizer que $e^{j0n} = e^{j2\pi n} = e^{j4\pi n} = \ldots$







- O eixo de frequências agora não é mais dado em Hertz!
  - Frequência vai de 0 a π
  - Para converter em Hertz:
    - regra de três onde ϖ equivale a Fs/2 Hertz

- Condições para existência:
  - x[n] for somável $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$
  - Ou tiver energia finita $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$

- Outra característica importante: simetria par

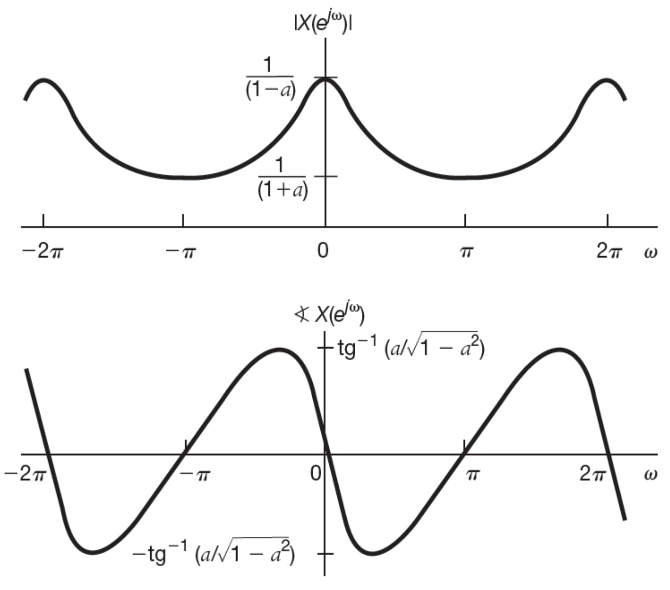
$$X(n) = X^*(N-n)$$

- Séries mais comuns:

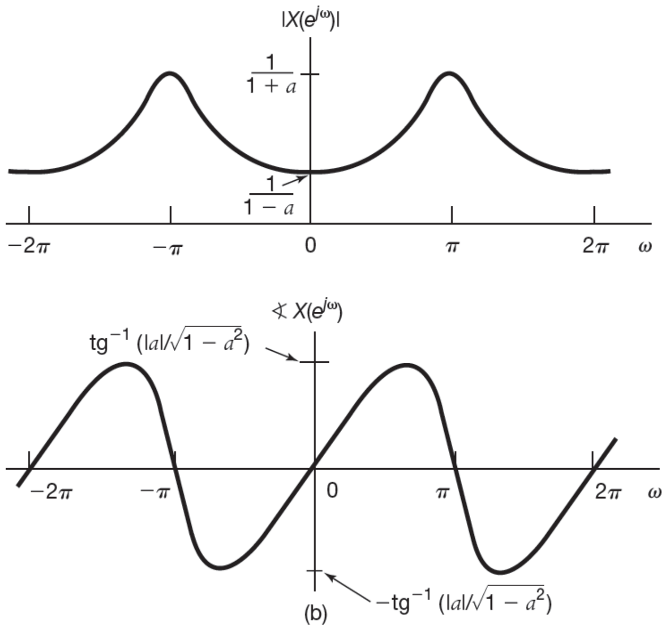
$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1-a^N}{1-a}$	$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \qquad \lvert a\rvert < 1$
$\sum_{n=0}^{N-1} na^n = \frac{(N-1)a^{N+1} - Na^N + a}{(1-a)^2}$	$\sum_{n=0}^{\infty} na^n = \frac{a}{(1-a)^2} \qquad \lvert a\rvert < 1$
$\sum_{n=0}^{N-1} n = \frac{1}{2}N(N-1)$	$\sum_{n=0}^{N-1} n^2 = \frac{1}{6}N(N-1)(2N-1)$

Exemplo: estime a TF do sinal:

$$x[n] = a^n u[n], \quad |a| < 1$$



(a)



(b)

Propriedades

- Geralmente similares a do tempo contínuo

1) Simetria do espectro

$$X\left(e^{j(\omega+2\pi)}\right) = X\left(e^{j\omega}\right)$$

$\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|$ ➡ par de ω

$\angle X\left(e^{j\omega}\right)$ ➡ ímpar de ω

– Não vale para o tempo contínuo

2) Linearidade

$$ax_1[n] + bx_2[n] \stackrel{\Im}{\longleftrightarrow} aX_1\left(e^{j\omega}\right) + bX_2\left(e^{j\omega}\right)$$

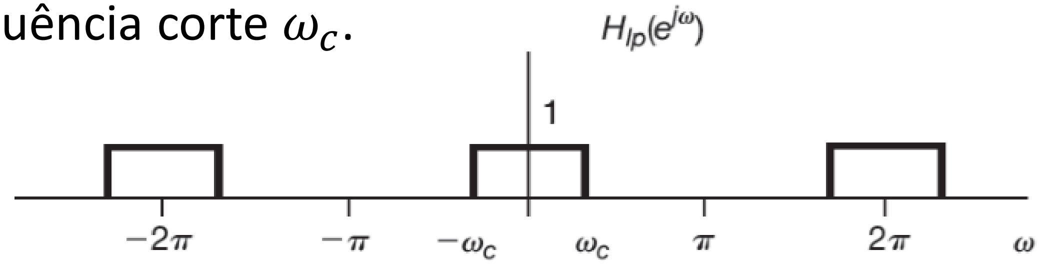
3) Deslocamento tempo-frequência-tempo

$$x[n] \xleftrightarrow{\Im} X\left(e^{j\omega}\right)$$

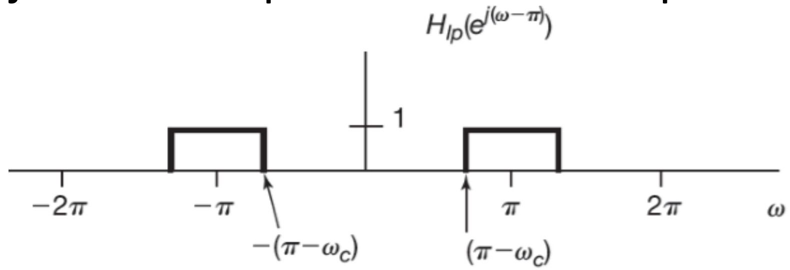
$$x[n-n_0] \xleftrightarrow{\Im} e^{-j\omega n_0} X\left(e^{j\omega}\right)$$

$$e^{j\omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{\Im} X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right)$$

Exemplo: considere a resposta ideal do filtro passa-baixas $H_{lp}(e^{j\omega})$ com frequência corte ω_c.



A partir dela, projeto o filtro passa alta com resposta a freq. similar a:

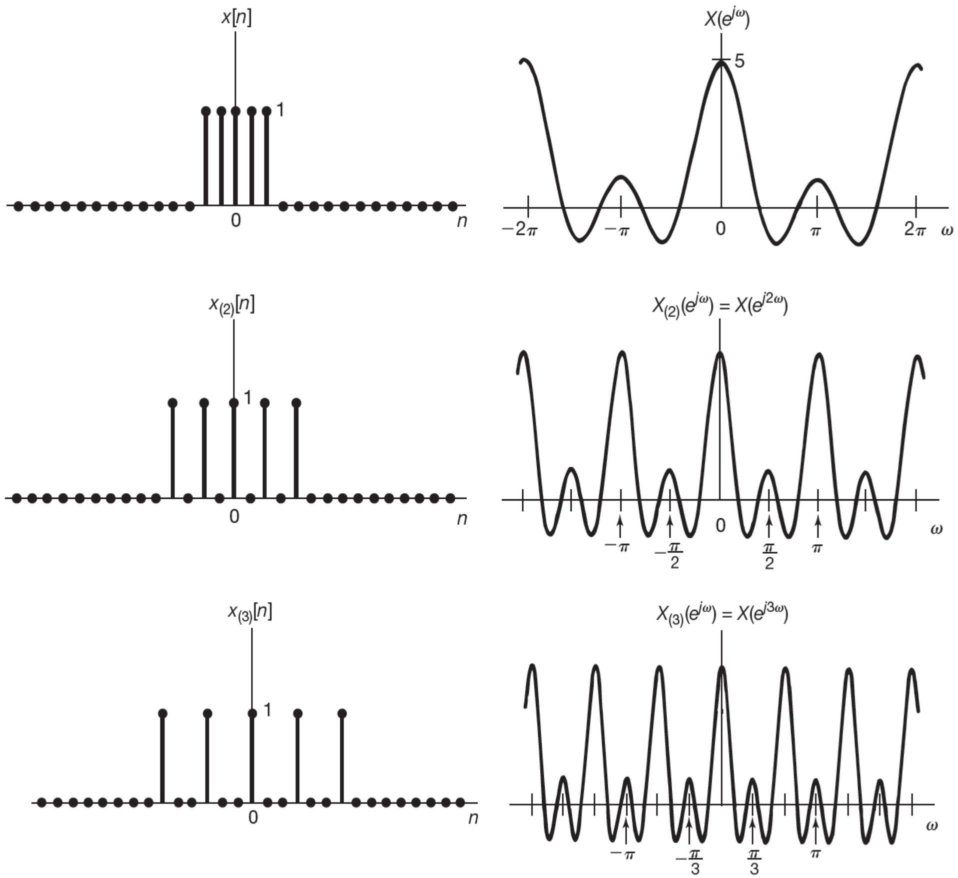


$$h_{hp}[n] = e^{j\pi n} h_{lp}[n]$$
$$= (-1)^n h_{lp}[n]$$

4) Expansão no tempo

Exemplo:

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & \text{se } n \text{ for múltiplo de } k \\ 0, & \text{se } n \text{ não for múltiplo de } k \end{cases}$$



5) Convolução

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[\mathrm{n}]$$

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

6) Multiplicação no tempo

$$x_1[n] \xleftrightarrow{\Im} X_1\left(e^{j\omega}\right) \qquad x_2[n] \xleftrightarrow{\Im} X_2\left(e^{j\omega}\right)$$

$$y[n] = x_1[n]\,x_2[n]$$

logo

$$Y\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]\,x_2[n]e^{-j\omega n}$$

$$Y\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1\left(e^{j\theta}\right)X_2\left(e^{j(\omega-\theta)}\right)d\theta$$

Convolução periódica de $X_1(e^{j\omega})$ e $X_2(e^{j\omega})$

7) Questão da dualidade

	Tempo contínuo		Tempo discreto	
	Domínio do tempo	**Domínio da frequência**	**Domínio do tempo**	**Domínio da frequência**
Série de Fourier	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ tempo contínuo periódico no tempo	$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t}$ frequência discreta aperiódico em frequência	$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$ tempo discreto periódico no tempo	$a_k = \frac{1}{N}\sum_{k=\langle N\rangle} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$ frequência discreta periódico em frequência
Transformada de Fourier	$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$ tempo contínuo aperiódico no tempo	$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$ frequência contínua aperiódico em frequência	$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$ tempo discreto aperiódico no tempo	$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}$ frequência contínua periódico em frequência

dualidade

dualidade

dualidade

Existe dualidade
tempo contínuo

NÃO existe dualidade
tempo discreto

Propriedade	Sinal aperiódico	Transformada de Fourier
	$x[n]$ $y[n]$	$\left.\begin{array}{l} X(e^{j\omega}) \\ Y(e^{j\omega}) \end{array}\right\}$ periódicos com período 2π
Linearidade	$ax[n]+by[n]$	$aX(e^{j\omega})+bY(e^{j\omega})$
Deslocamento no tempo	$x[n-n_0]$	$e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$
Deslocamento na frequência	$e^{j\omega_0 n}x[n]$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
Conjugação	$x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
Reflexão no tempo	$x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$
Expansão de tempo	$x_{(k)}[n]=\begin{cases} x[n/k], & \text{se } n = \text{múltiplo de } k \\ 0, & \text{se } n \neq \text{múltiplo de } k \end{cases}$	$X(e^{jk\omega})$
Convolução	$x[n] * y[n]$	$X(e^{j\omega})\,Y(e^{j\omega})$
Multiplicação	$x[n]\,y[n]$	$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$
Diferenciação no tempo	$x[n]-x[n-1]$	$(1-e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$
Acumulação	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\frac{1}{1-e^{-j\omega}}X(e^{j\omega})$ $+\pi X(e^{j0})\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega-2\pi k)$
Diferenciação na frequência	$nx[n]$	$j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
Simetria conjugada para sinais reais	$x[n]$ real	$\begin{cases} X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) \\ \mathcal{R}e\{X(e^{j\omega})\} = \mathcal{R}e\{X(e^{-j\omega})\} \\ \mathcal{I}m\{X(e^{j\omega})\} = -\mathcal{I}m\{X(e^{-j\omega})\} \\ \lvert X(e^{j\omega})\rvert = \lvert X(e^{-j\omega})\rvert \\ \sphericalangle X(e^{j\omega}) = -\sphericalangle X(e^{-j\omega}) \end{cases}$

UFU
Prof. Alan
www.alan.eng.br

Sinais e Sistemas 2

Capítulo 2:
Transf. de Fourier em tempo discreto

- Introdução tempo discreto
- Formulação matemática
- Propriedades
  - Simetria
  - Linearidades
  - Deslocamento tempo-freq.
  - Expansão no tempo
  - Multiplicação e convolução
  - Dualidade
  - Outras (tabela propriedades)
- **Tabela (transf. sinais)**
- Sistemas e eq. diferenças
- Exercícios

Sinal	Transformada de Fourier
$\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$
$e^{j\omega_0 n}$	$2\pi \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi\ell)$
$\cos \omega_0 n$	$\pi \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \{\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi\ell) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi\ell)\}$
$\text{sen}\, \omega_0 n$	$\frac{\pi}{j} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \{\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi\ell) - \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi\ell)\}$
$a^n u[n],\ \ \lvert a\rvert < 1$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$
$x[n] = \begin{cases} 1, & \lvert n\rvert \le N_1 \\ 0, & \lvert n\rvert > N_1 \end{cases}$	$\frac{\text{sen}[\omega(N_1 + \frac{1}{2})]}{\text{sen}(\omega/2)}$
$\frac{\text{sen}\, Wn}{\pi n} = \frac{W}{\pi}\text{sinc}\left(\frac{Wn}{\pi}\right)$ $0 < W < \pi$	$X(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \le \lvert\omega\rvert \le W \\ 0, & W < \lvert\omega\rvert \le \pi \end{cases}$ $X(\omega)$ periódico com período 2π
$\delta[n]$	1
$u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \pi\delta(\omega - 2\pi k)$
$\delta[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
$(n+1)a^n u[n],\ \ \lvert a\rvert < 1$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$
$\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!} a^n u[n],\ \ \lvert a\rvert < 1$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^r}$

Sistemas caracterizados por equações de diferenças

- Formato:

$$x[n],\ X(e^{j\omega}) \longrightarrow \boxed{h[n],\ H(e^{j\omega})} \longrightarrow y[n],\ Y(e^{j\omega})$$

- Matematizando:

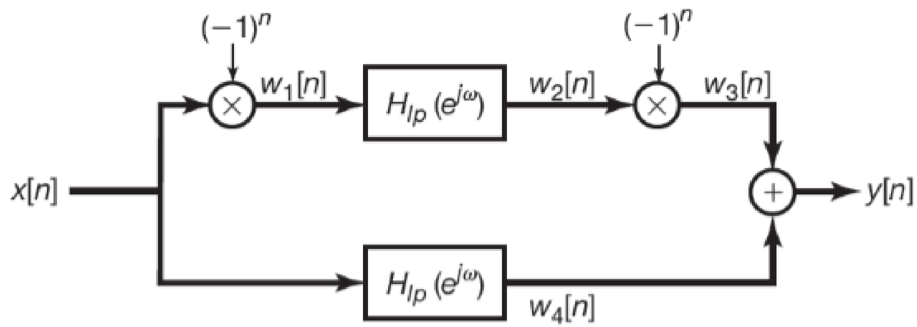
$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega} Y\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\omega} X\left(e^{j\omega}\right)$$

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\omega}}$$

Exercícios

1) Considere o sistema abaixo formado pelos módulos. Os sistemas $H_{lp}(e^{j\omega})$ são filtros passa baixas com frequências de corte em $\pi/4$ e ganho unitário na banda de passagem. Determine a comportamento global do sistema.



2) Determine a resposta ao impulso do sistema LIT causal que é caracterizado pela equação de diferenças:

$$y[n]-\frac{3}{4}y[n-1]+\frac{1}{8}y[n-2]=2x[n]$$

Dados/dicas:

- roots([1 -3/4 1/8])

  ans = 0.5 e 0.25
- Polo=(1 - r.e^{-jw})
- Frações parciais tempo discreto: chamar e^{-jw}=u (função Matlab: residuez)