Universidade Federal de Uberlândia
Engenharia Eletrônica e de Telecomunicações

- Sinais e Sistemas 2 -

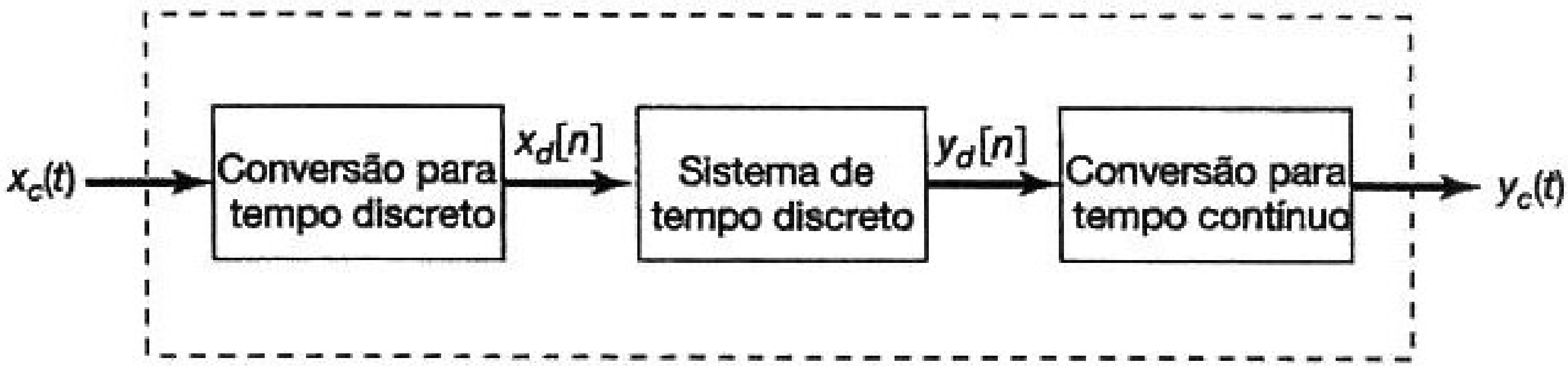
Capítulo 4*: Amostragem

*baseado no capítulo 7 do livro "Sinais e Sistemas", Oppenheim, A. V.; 2ª Edição.

Prof. Alan Petrônio Pinheiro

Introdução

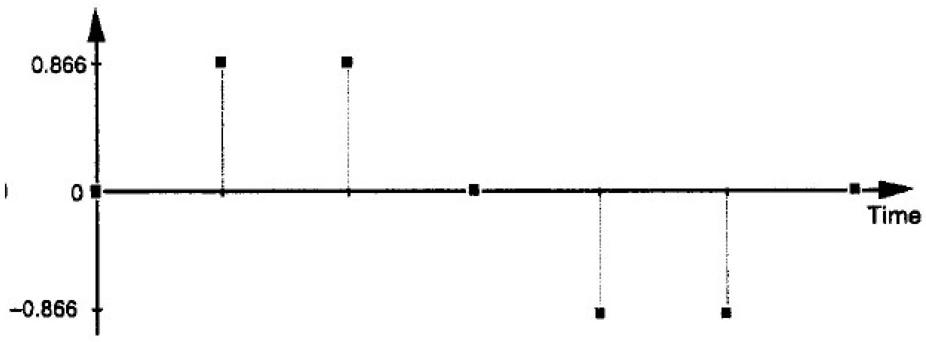
- Preferência por processamento de sinais de tempo discreto.
- É uma vantagem em muitas aplicações.
- Pode ser implementado em um computador de propósito geral, microprocessadores, etc.

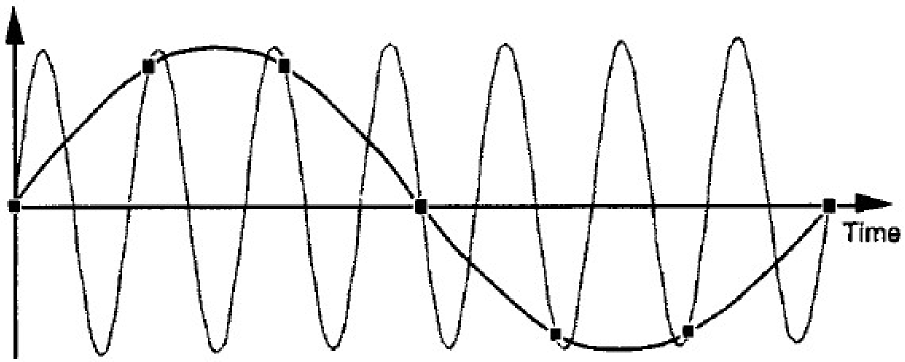


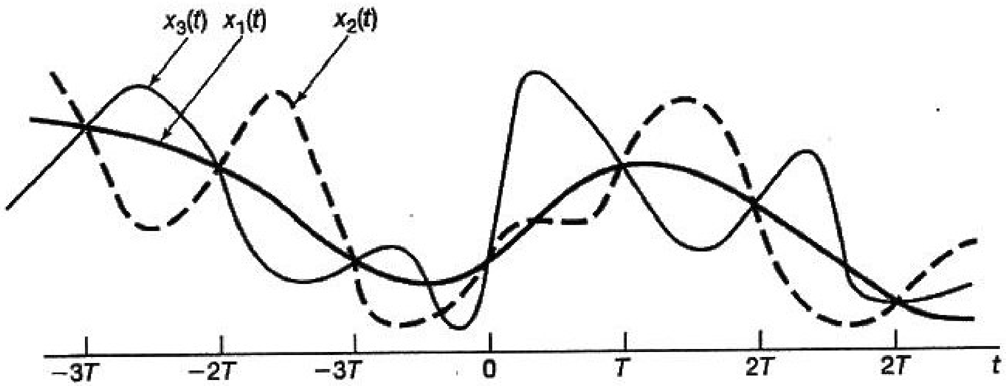
- Sendo $x_d[n]$ e $y_d[n]$ sinais de tempo discreto correspondendo a $x_c(t)$ e $y_c(t)$.

Teorema da amostragem

- Problema: sinais diferentes mas com alguns pontos parecidos:





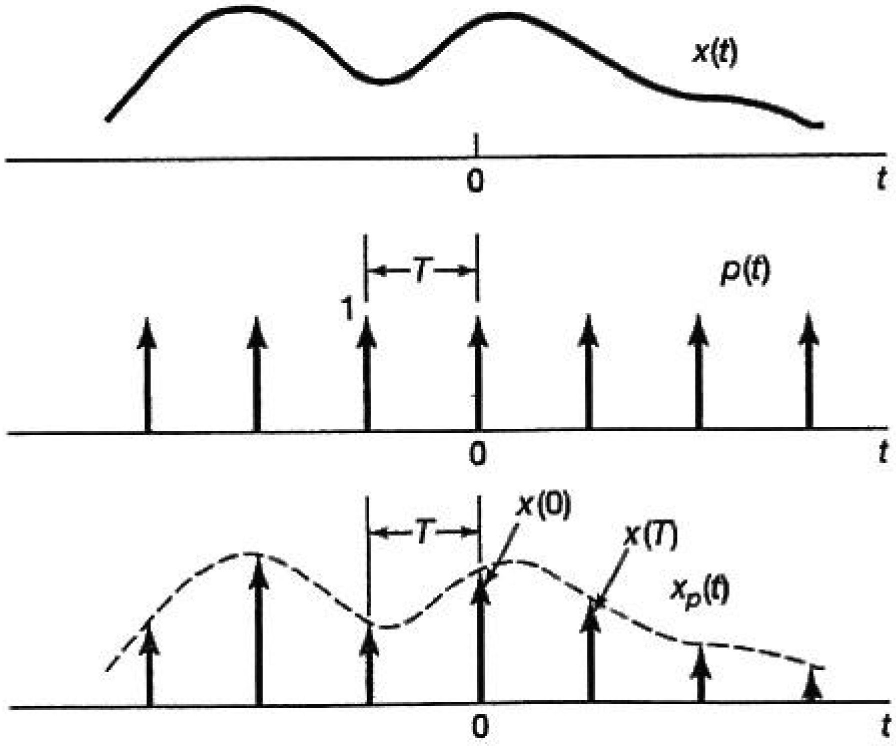


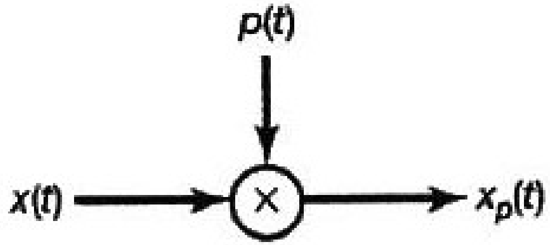
$$x_1(KT) = x_2(KT) = x_3(KT)$$

- É necessário:
  - Sinal limitado em banda.
  - Amostras tomadas suficientemente próximas em relação à frequência mais alta presente no sinal.

- Consequência:
  - Amostras representam unicamente o sinal.
  - O sinal pode ser reconstruído a partir de suas amostras.

- Amostragem por trem de impulsos:
  - Representação do sinal de tempo contínuo em intervalos regulares.
  - Multiplicação de x(t) por um trem de impulsos.





- p(t): função de amostragem.
- T: período de amostragem.
- $\omega_s = 2\pi/T$: frequência de amostragem.

- Ideia matemática da amostragem por trem de impulsos:

Assim,

$$x_p(t) = x(t)p(t)$$

com

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Lembrar que

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$$

Então

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

A transf. de Fourier de um trem de pulsos é: $P(j\omega) = \dfrac{2\pi}{T}\sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$

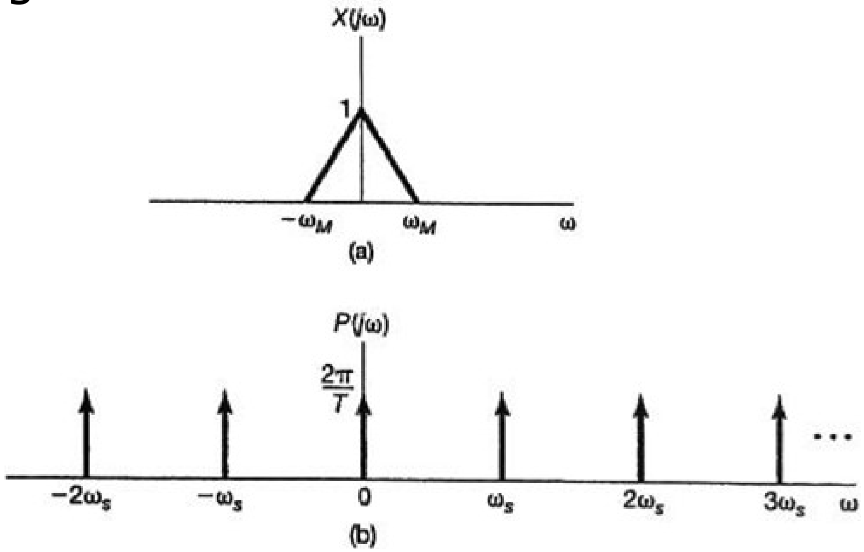
Lembrando que a convolução com um impulso simplesmente desloca um sinal

$$X(j\omega)*\delta(\omega-\omega_0)=X(j(\omega-\omega_0))$$

Logo:

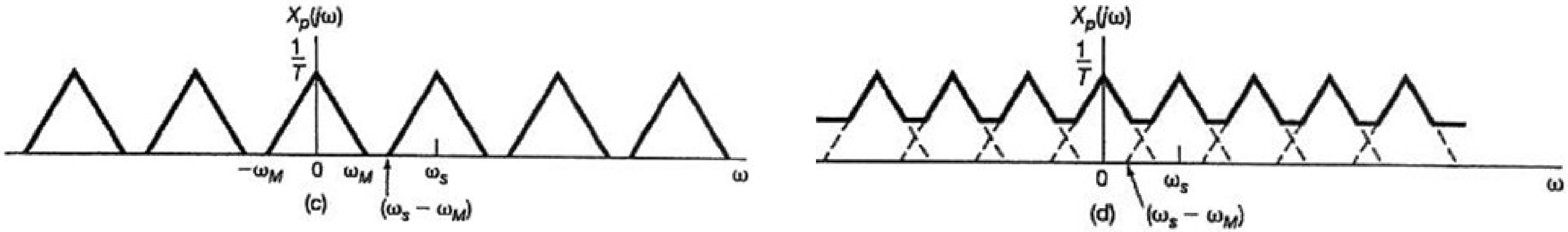
$$X_p(j\omega)=\frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{\infty}X(j(\omega-k\omega_s))$$

Ou, graficamente:

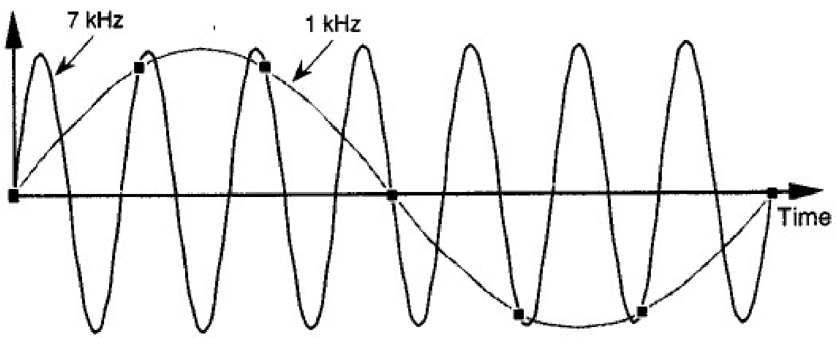


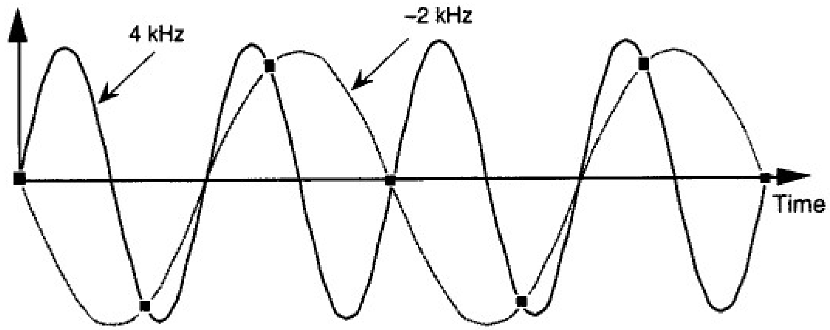
Alguns pontos importantes:

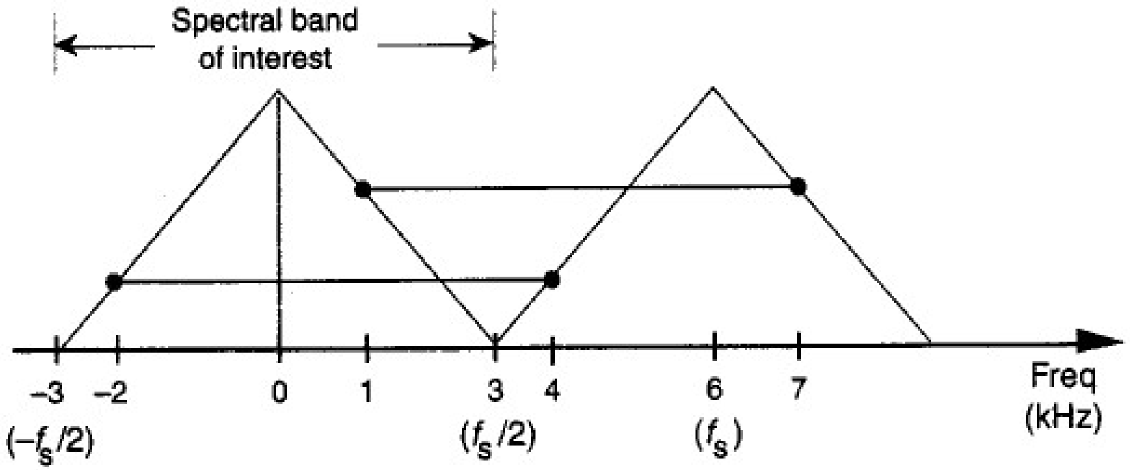
- Se $\omega_s > 2\omega_M$, não existe sobreposição entre as réplicas
- Se $\omega_s < 2\omega_M$ existe sobreposição.
- Se $\omega_s > 2\omega_M$, x(t) pode ser recuperado por meio de um filtro passa-baixas com ganho T
- A frequência $2\omega_M$ é conhecida como taxa de **Nyquist**.



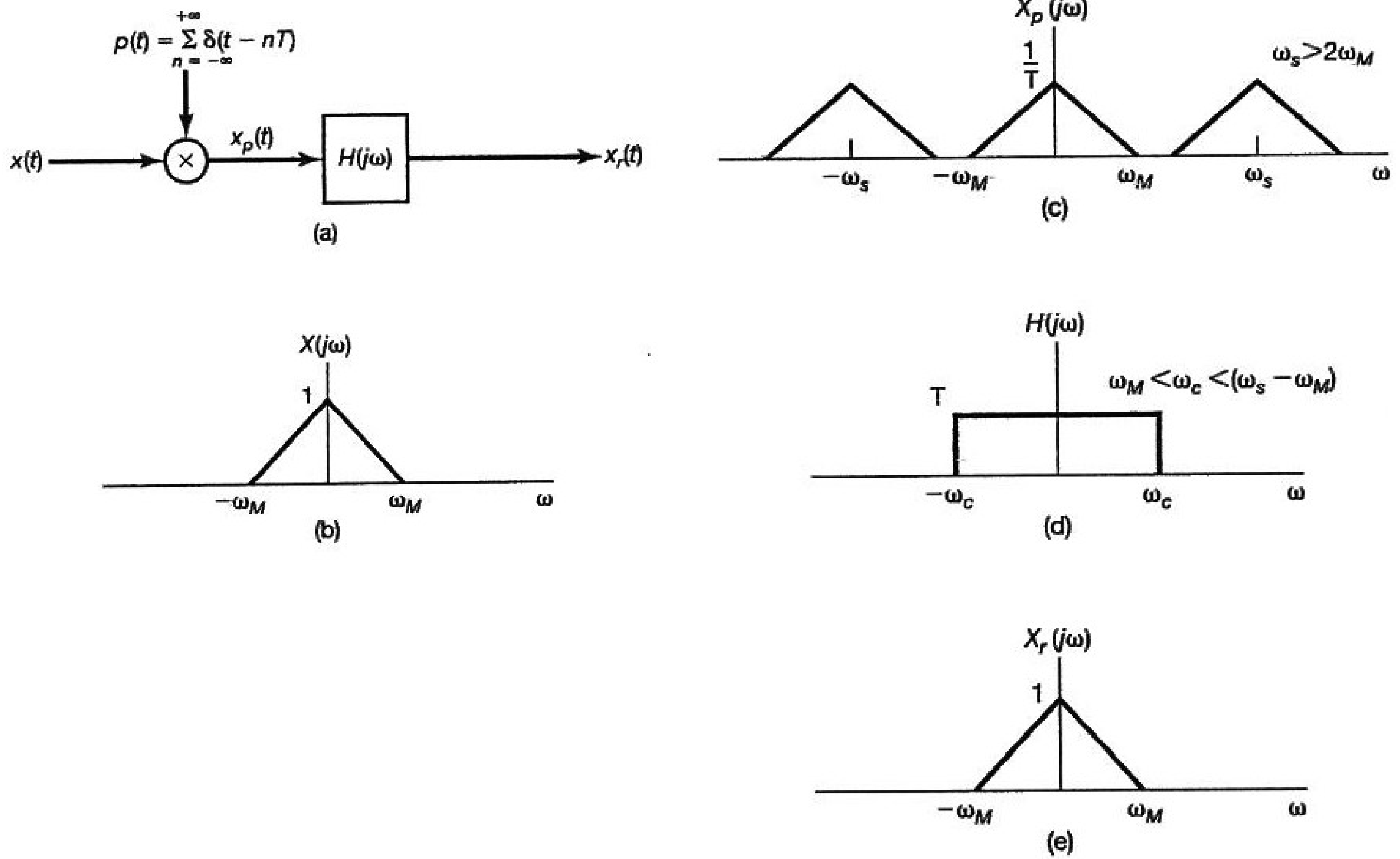
- Graficamente, de toura forma:





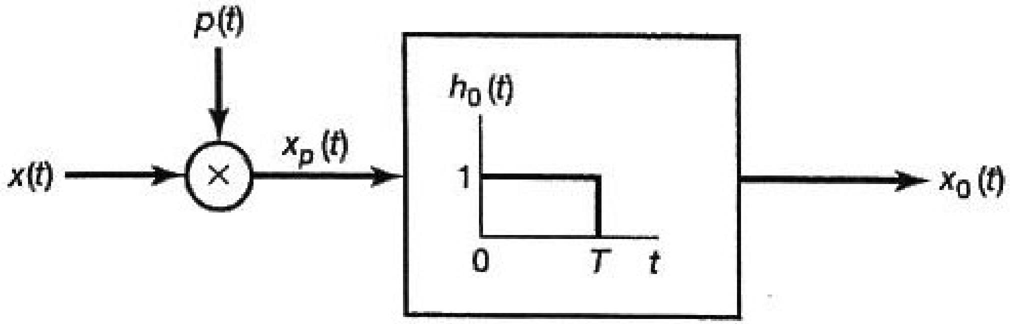


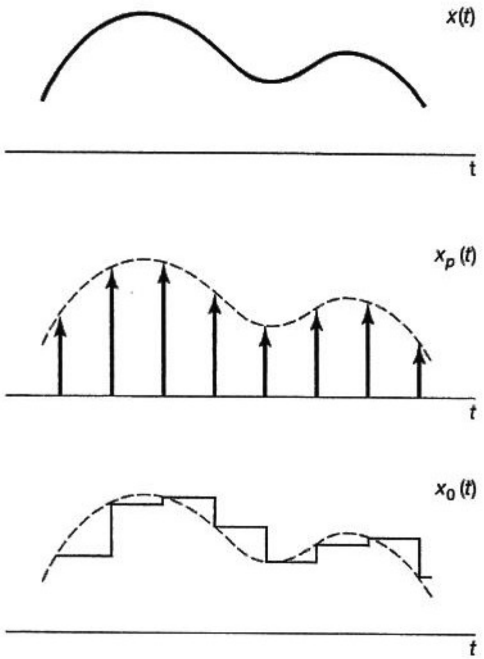
- Formas de evitar as réplicas:
  - Na prática é só evitar de plotar frequências acima Fs/2



- Amostragem com um retentor de ordem zero
  - Circuito “sample and hold”

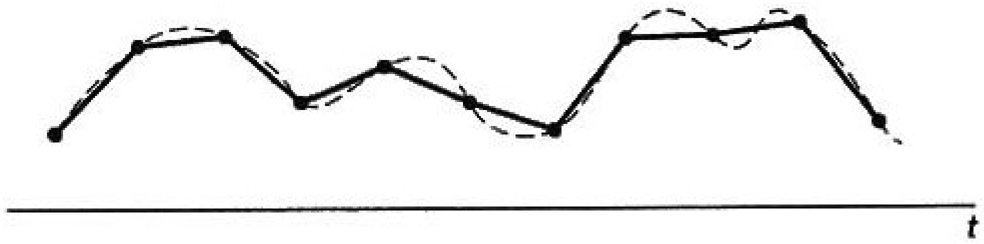
  - Melhorando a forma de onda:





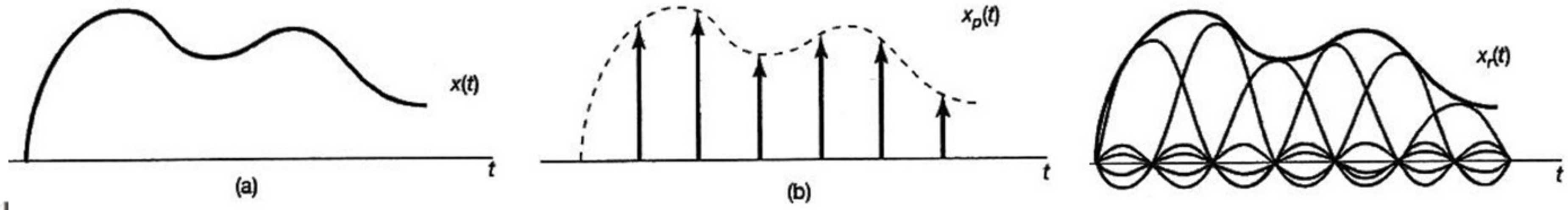
- Outras formas de melhorar a “reconstrução” do sinal:

-Interpolação linear



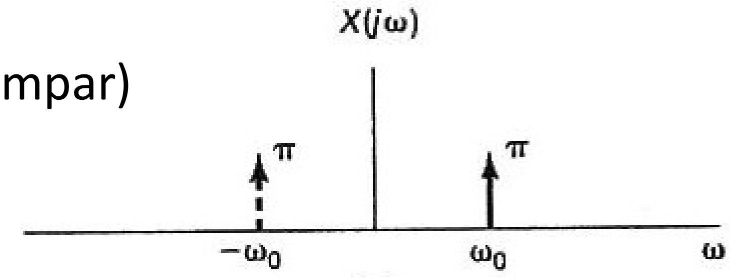
-Interpolação mais complexas: pontos ligados por polinômios de ordem mais alta ou outras funções matemáticas.

$$x_r(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)h(t-nT) \quad \Rightarrow \quad x_r(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\frac{\omega_c t}{\pi}\frac{\mathrm{sen}(\omega_c(t-nT))}{\omega_c(t-nT)}$$

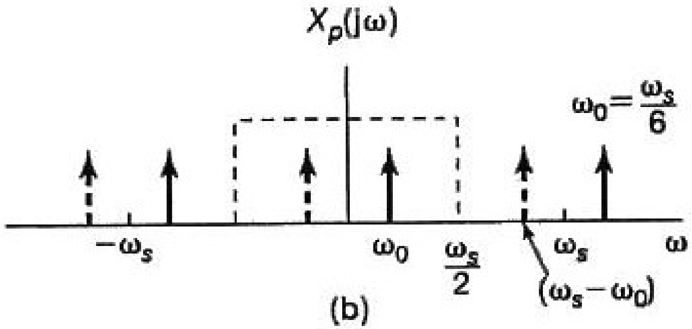


Efeito da subamostragem: aliasing

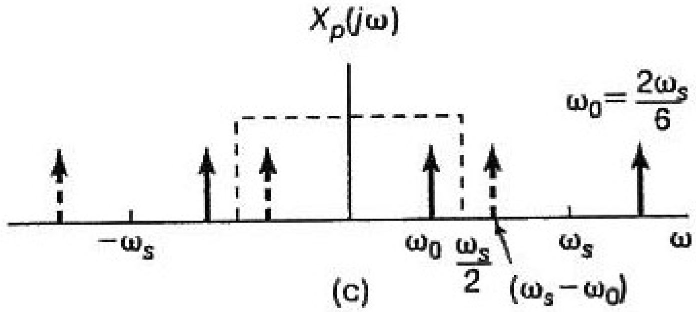
- Considere este sinal
  - O ‘pontilhado’ tem fase inversa (simetria impar)



  - variando ω_0 e mantendo ω_s fixa

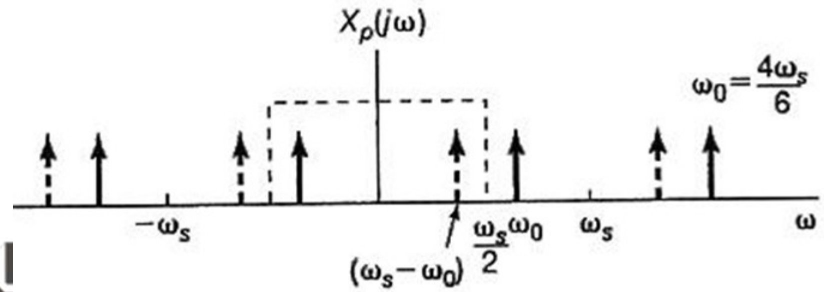


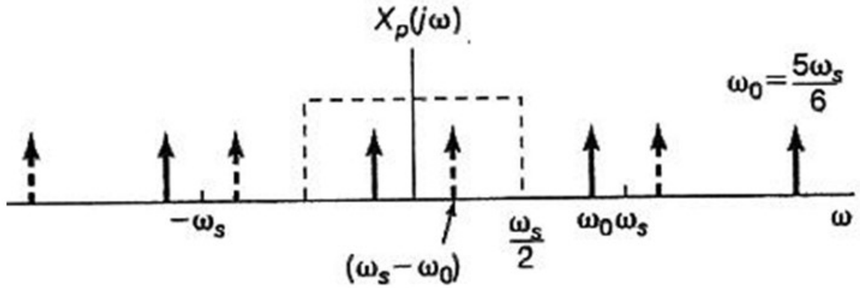
(b)



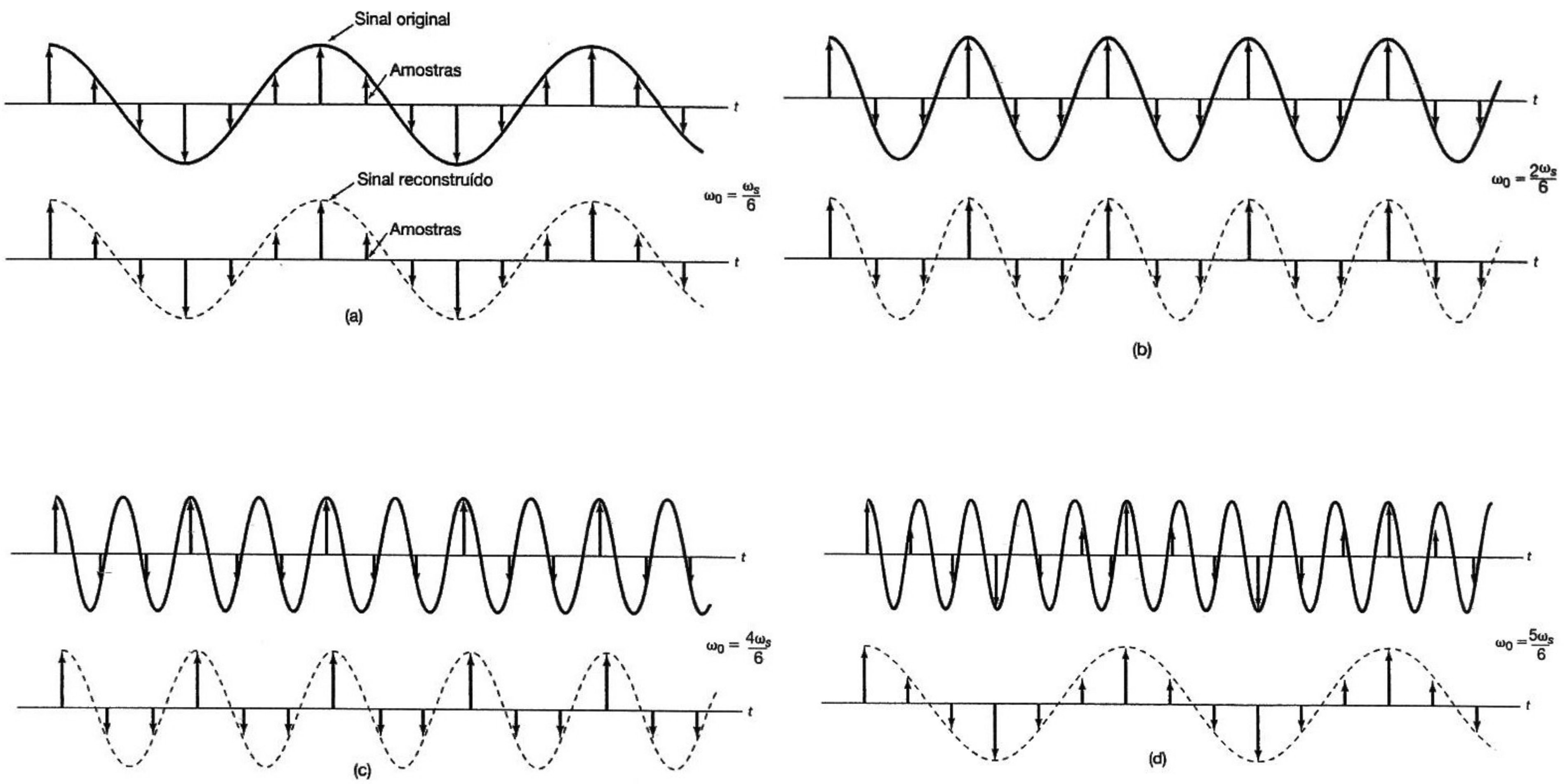
(c)

  - Aumentei ao ponto de não mais obedecer Nyquest:

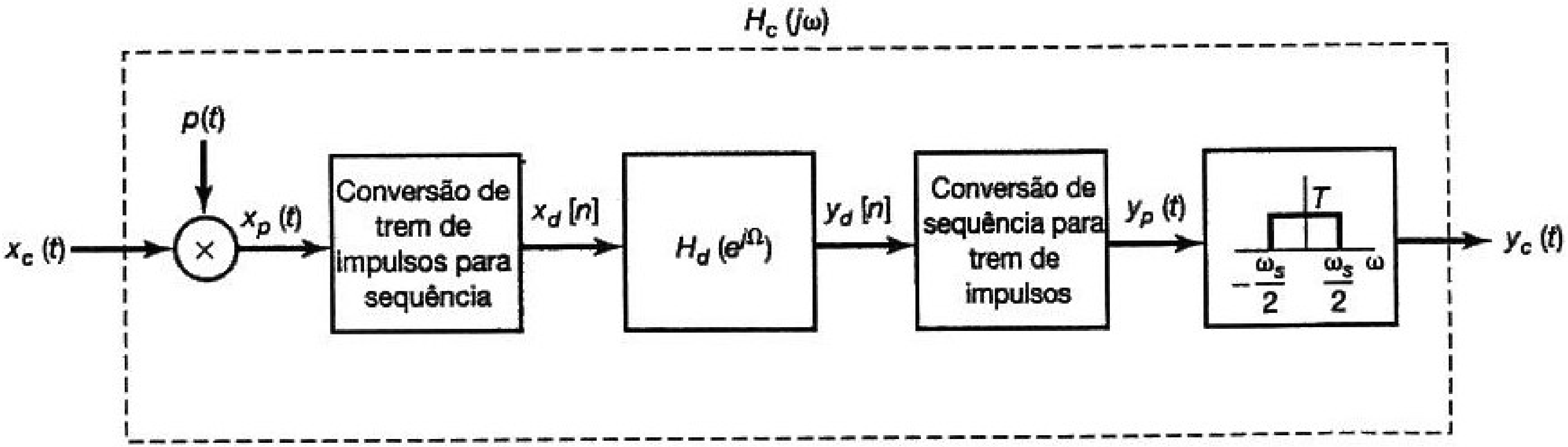




- Analisando o aliasing no tempo:



- Representação do sistema total



- Se $x_d[n] = y_d[n]$ e as condições do teorema da amostragem forem atendidas, será um sistema identidade.