



**Universidade Federal de Uberlândia
Engenharia Eletrônica e de Telecomunicações**

- Sinais e Sistemas 2 -

Capítulo 5*: Transformada Z

*baseado no capítulo 10 do livro "Sinais e Sistemas", Oppenheim, A. V.; 2ª Edição.

Prof. Alan Petrônio Pinheiro

Introdução

- Vamos apresentar logo ...

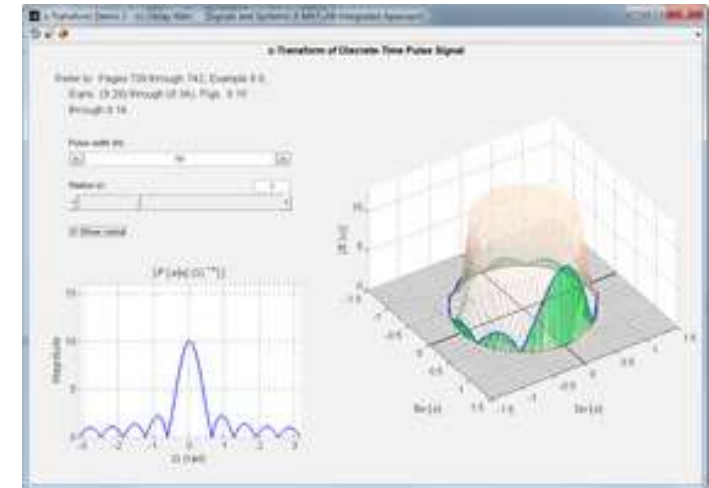
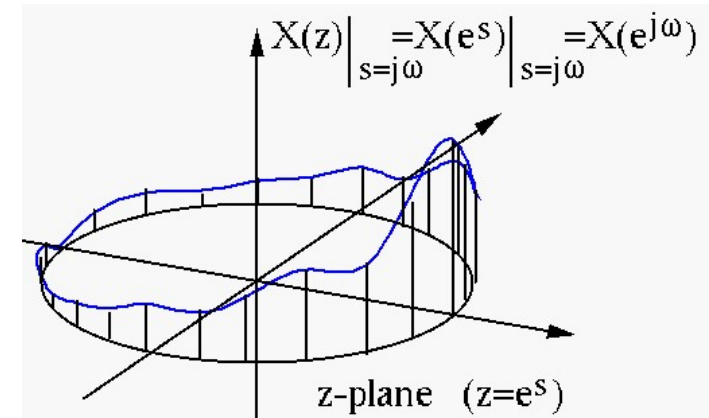
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

onde:

$$z = re^{j\omega}$$

Desta forma:

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](re^{j\omega})^{-n}$$



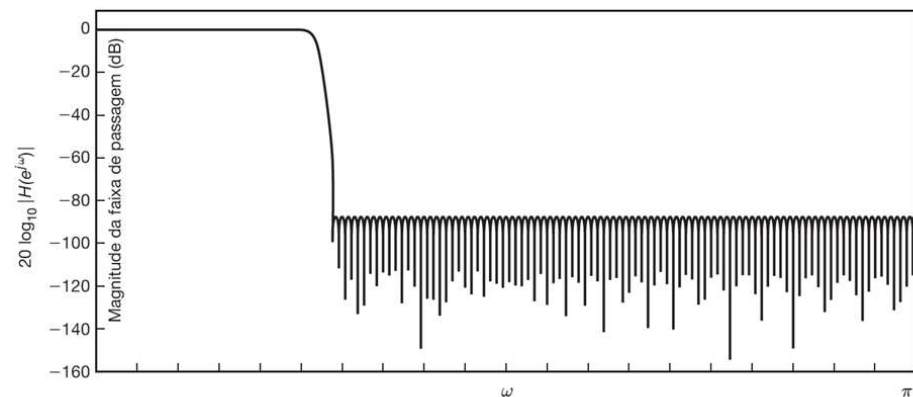
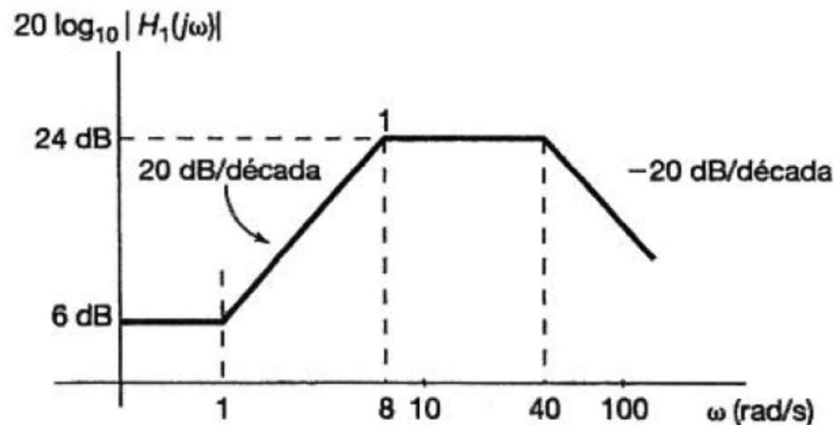
Exemplo: qual transf. Z do sinal $x_1(n) = \{1, 2, 3, 7, 0, 1\}$

- Lembrando: o que é uma transformada?
- Laplace x transformada Z
 - Tempo contínuo -> Laplace
 - Tempo discreto -> Transformada Z
- Transformada de Fourier x transformada Z

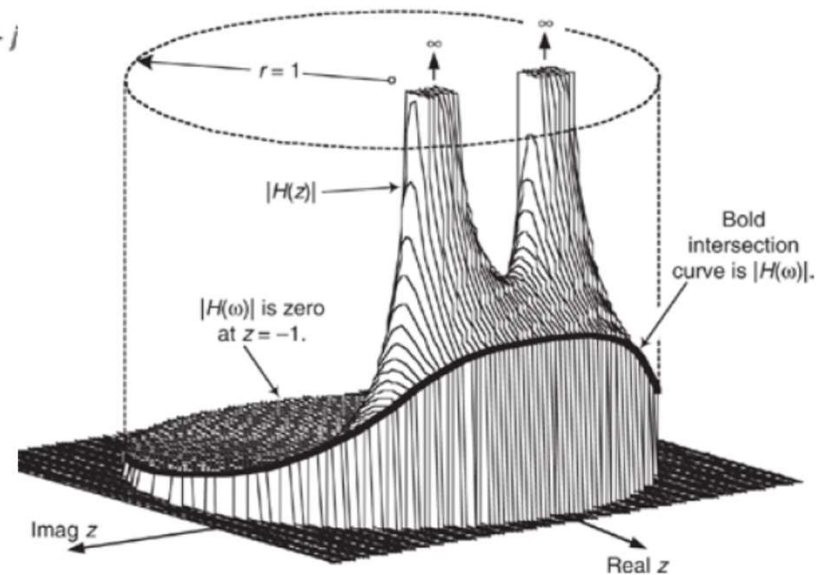
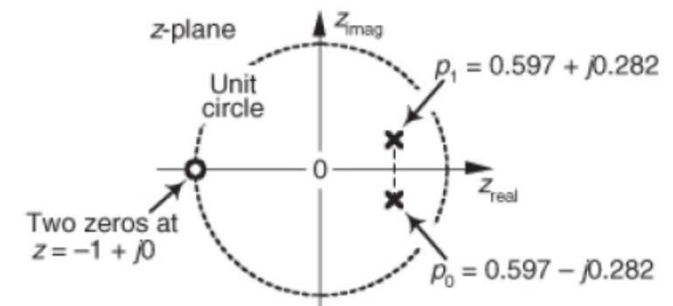
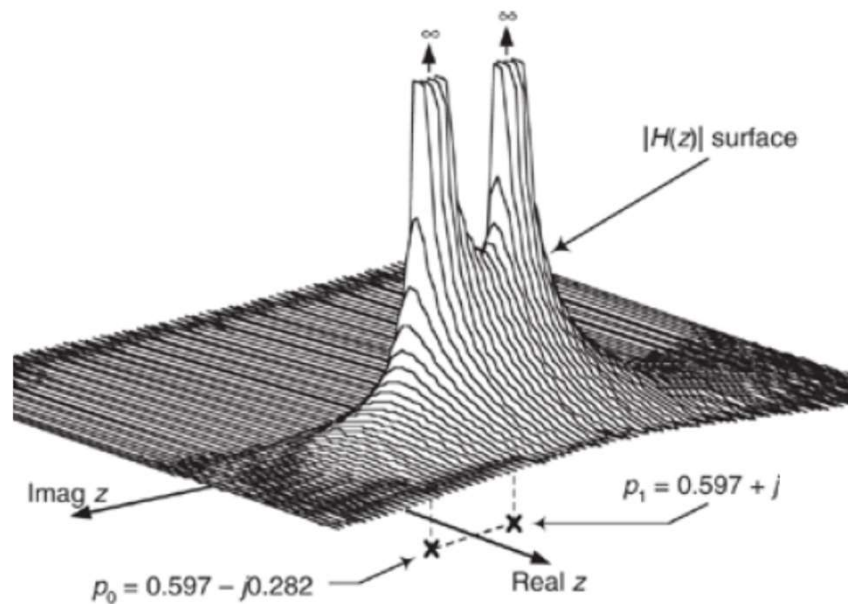
$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{x[n]r^{-n}\}e^{-j\omega n} \xrightarrow{r=1, \text{ ou } |z|=1} X(z)|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega})$$

- Por que usar a transformada Z?

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \iff H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\omega}}$$

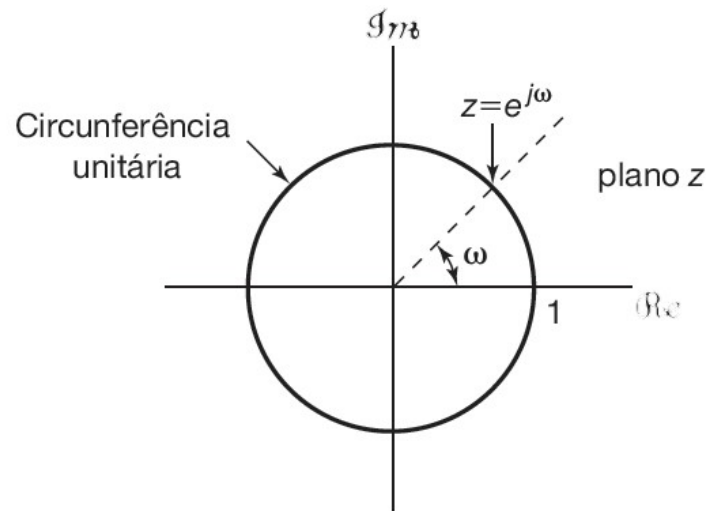


- Exemplo:
$$y(n) = 0.0605 \cdot x(n) + 0.121 \cdot x(n-1) + 0.0605 \cdot x(n-2) + 1.194 \cdot y(n-1) - 0.436 \cdot y(n-2).$$



- Relação importante:

“No contorno do plano z complexo corresponde a uma circunferência de raio unitário”

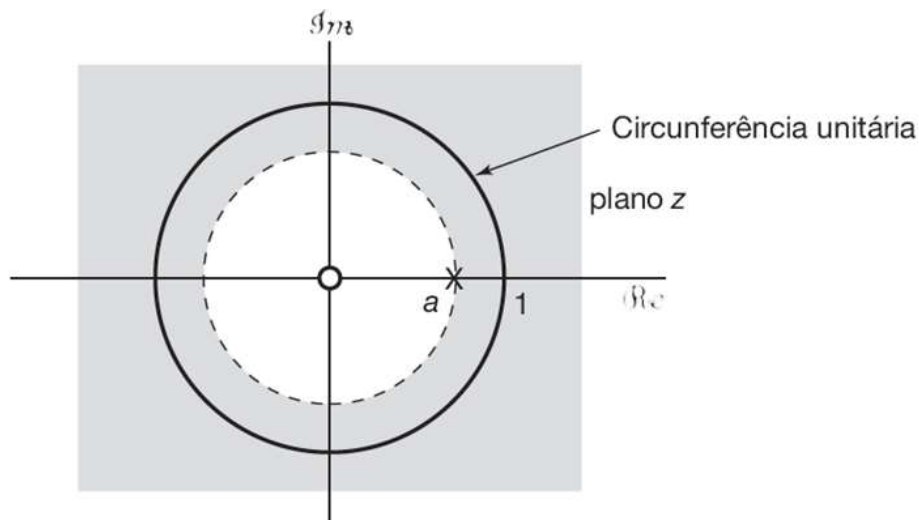


$$z = re^{j\omega}$$

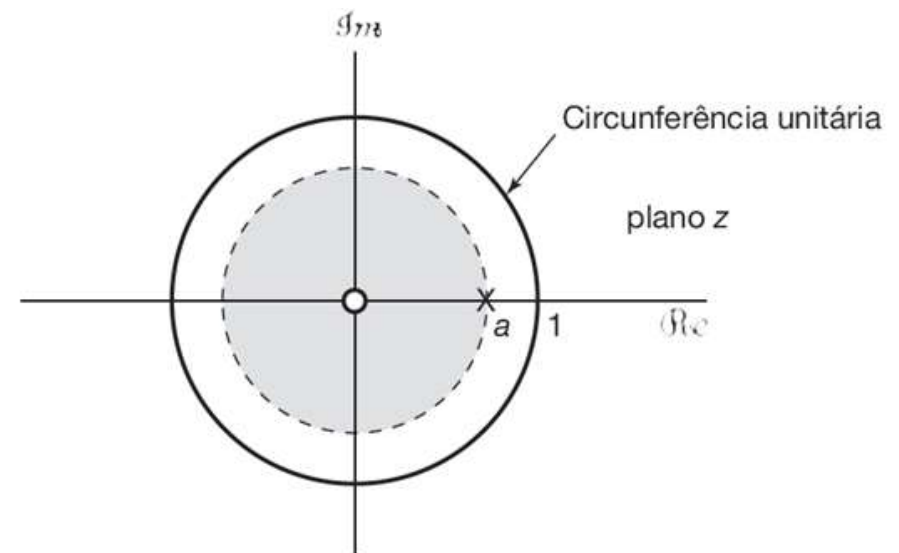
- “Importante”: a transformada z de uma sequência tem associada a ela uma faixa de valores de z para os quais $X(z)$ deve convergir
 - Região de convergência (RDC)

- Exemplos (ilustrar RDC): considere os 2 sinais abaixo considerando $0 < a < 1$. Calcule a transformada Z desses sinais e esboce o diagrama de polos e zeros e a região de convergência.

$$x[n] = a^n u[n]$$

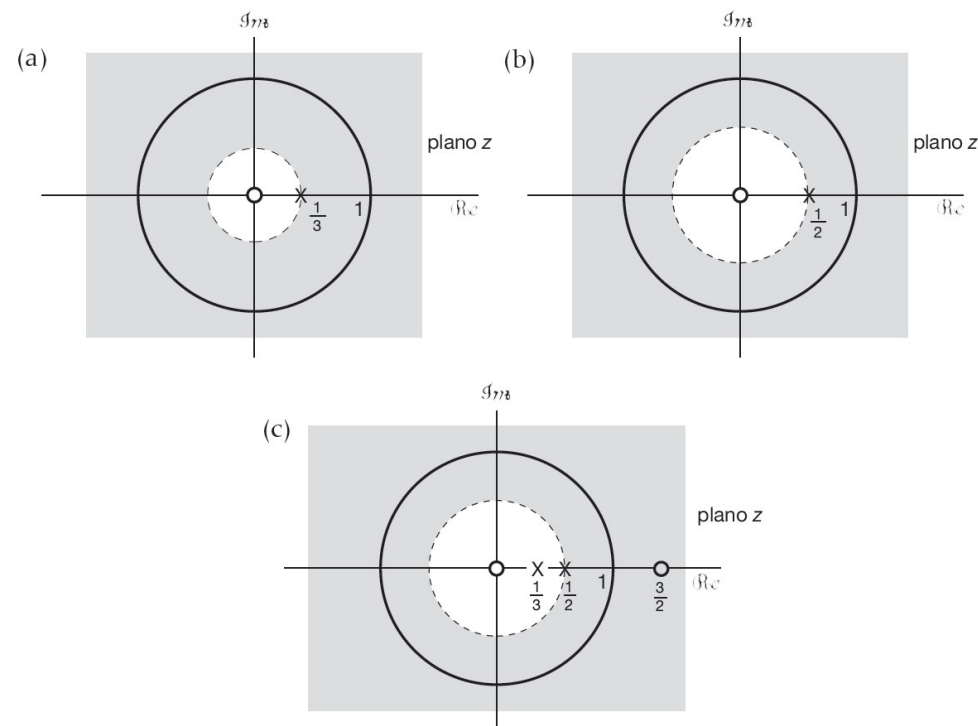


$$x[n] = -a^n u[-n-1]$$



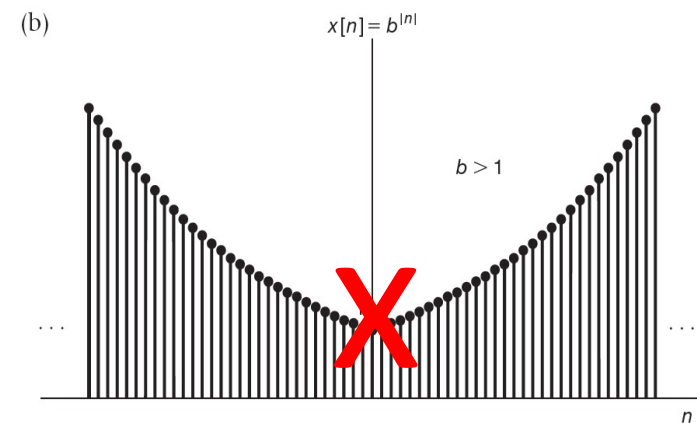
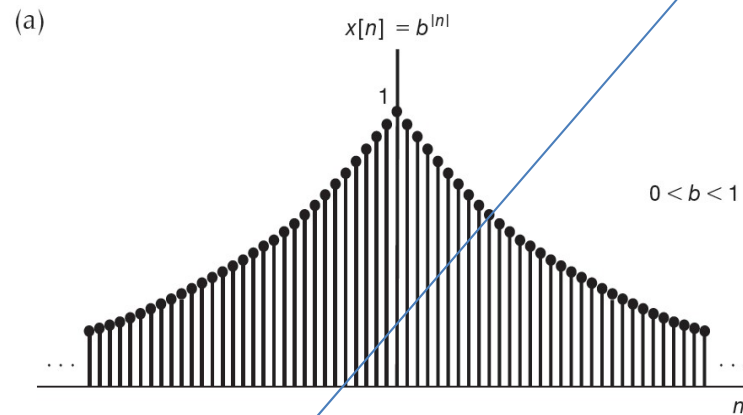
- Exemplo 2: Esboce o diagrama de polos e zeros e a região de convergência do sinal $x[n]$ que é a soma de duas exponenciais reais.

$$x[n] = 7\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$



- Exemplo 3: determine a localização dos polos e a região de convergência para o sinal:

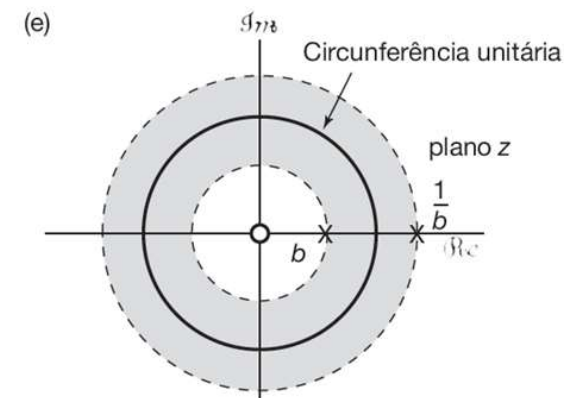
$$x[n] = b^{|n|}, b > 0$$



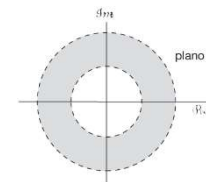
$$x[n] = b^n u[n] + b^{-n} u[-n-1]$$

$$b^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - bz^{-1}}, |z| > b$$

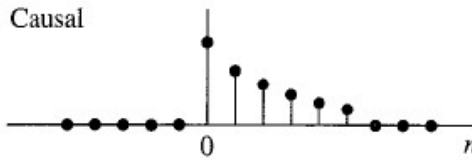
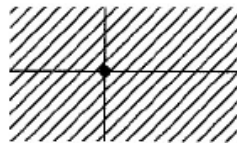
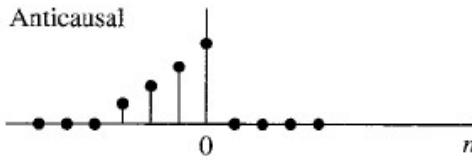
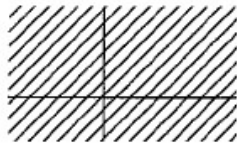
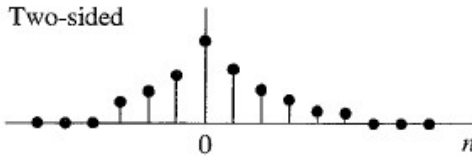
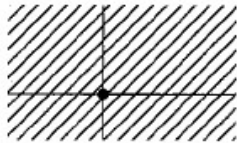
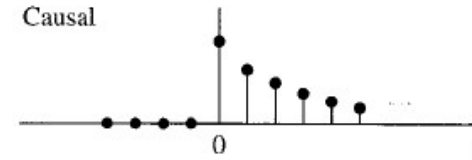
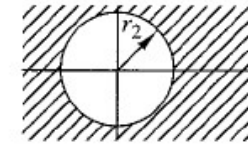
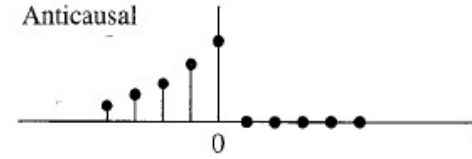
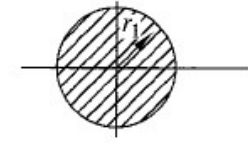
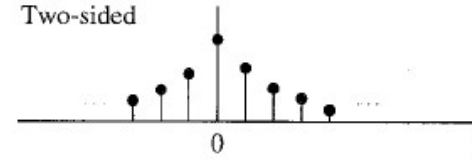
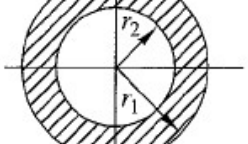
$$b^{-n} u[-n-1] \xleftrightarrow{z} \frac{-1}{1 - b^{-1}z^{-1}}, |z| < \frac{1}{b}$$



• Algumas propriedades da RDC:



- **Propriedade 1**: A RDC de $X(z)$ consiste em um anel no plano z centrado na origem.
- **Propriedade 2**: A RDC não contém polos.
- **Propriedade 3**: Se $x[n]$ tiver duração finita, a RDC será o plano z inteiro, exceto possivelmente $z=0$ e/ou $z=\infty$.
- **Propriedade 4**: Se $x[n]$ for uma sequência lateral direita e se a circunferência $|z| = r_0$ estiver na RDC, então todos os valores finitos de z para os quais $|z| > r_0$ também estarão na RDC.
- **Propriedade 5**: Se $x[n]$ for uma sequência lateral esquerda, e se a circunferência $|z| = r_0$ estiver na RDC, então todos os valores de z para os quais $0 < |z| < r_0$ também estarão na RDC.
- **Propriedade 6**: Se $x[n]$ for bilateral e a circunferência $|z| = r_0$ estiver na RDC, então a RDC consistirá em um anel no plano z que inclui a circunferência $|z| = r_0$.

Signal	ROC
Finite-Duration Signals	
Causal 	 Entire z -plane except $z = 0$
Anticausal 	 Entire z -plane except $z = \infty$
Two-sided 	 Entire z -plane except $z = 0$ and $z = \infty$
Infinite-Duration Signals	
Causal 	 $ z > r_2$
Anticausal 	 $ z < r_1$
Two-sided 	 $r_2 < z < r_1$

Z inversa

- Lembrando que:

$$X(re^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]r^{-n}\},$$

$$x[n] = r^n \mathcal{F}^{-1}[X(re^{j\omega})].$$

$$x[n] = r^n \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(re^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(re^{j\omega}) (re^{j\omega})^n d\omega$$

Calculando ao longo de um contorno $z = re^{j\omega}$ na RDC e mudando variável de integração: $z = re^{j\omega}$

$$dz = jre^{j\omega} d\omega = jz d\omega \quad \text{ou} \quad d\omega = (1/j)z^{-1}dz.$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz$$



- Exemplo 4: Determine a transformada z inversa de

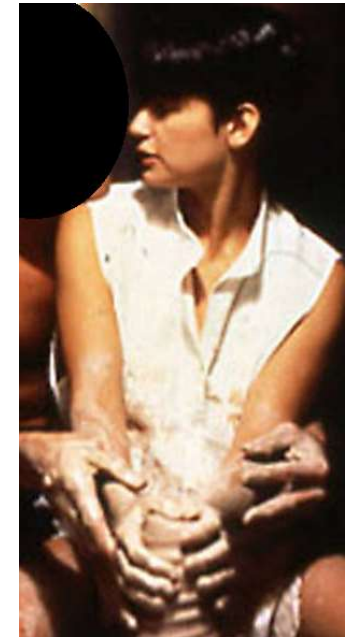
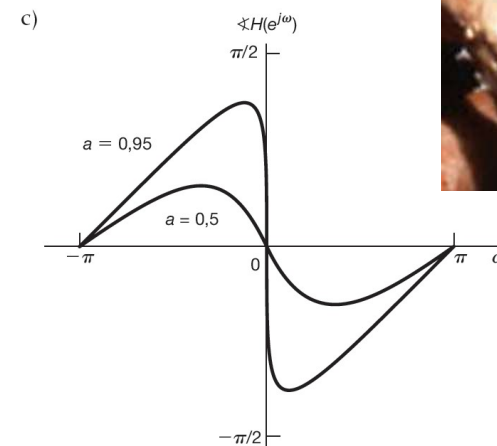
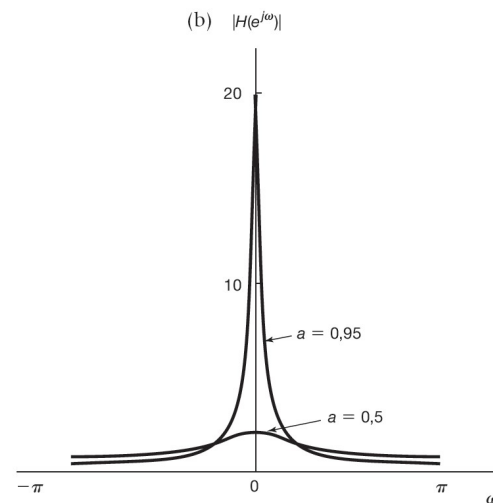
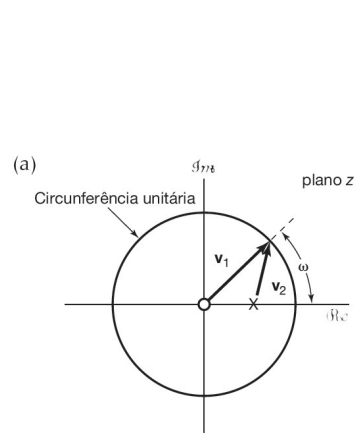
$$X(z) = \frac{3 - \frac{5}{6}z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)}, \quad |z| > \frac{1}{3}$$



Cálculo geométrico da transf. Fourier a partir de diagrama de polos e zeros

- Transf. Z = Transf. Fourier
 - Quando $|z| = 1$ e desde que a RDC inclua a circunferência unitária.
- Sistemas primeira ordem

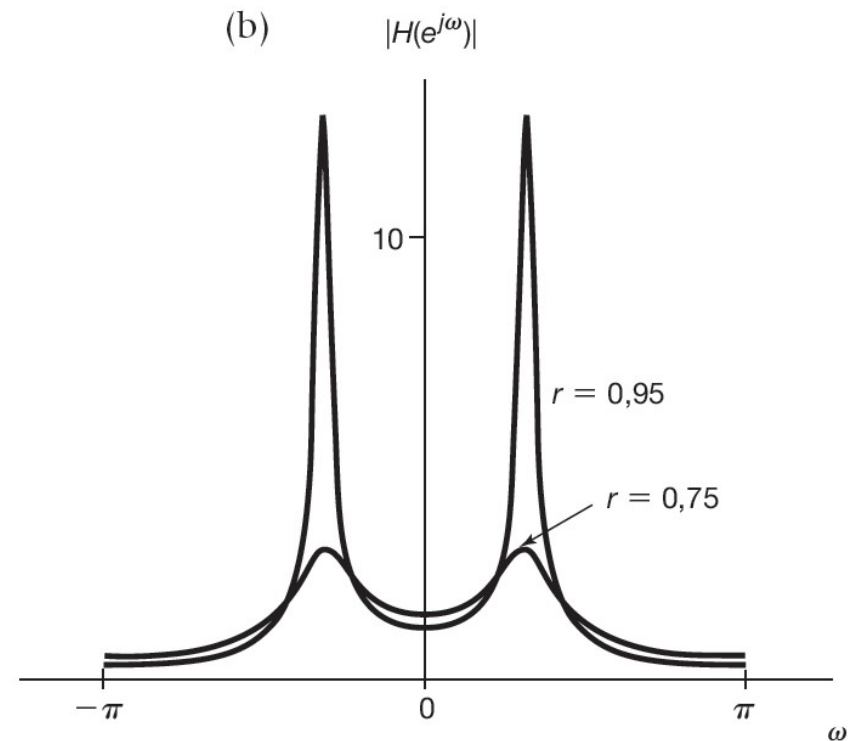
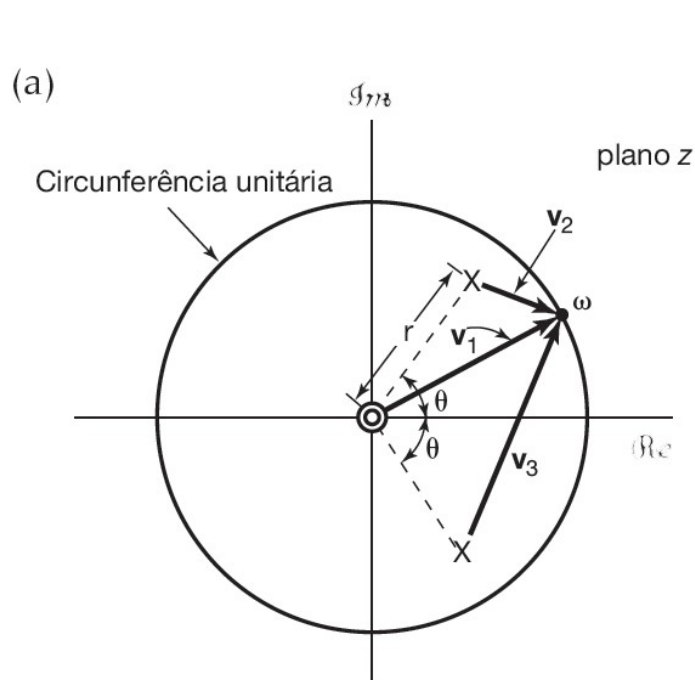
$$h[n] = a^n u[n] \quad H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \quad |z| > |a|$$



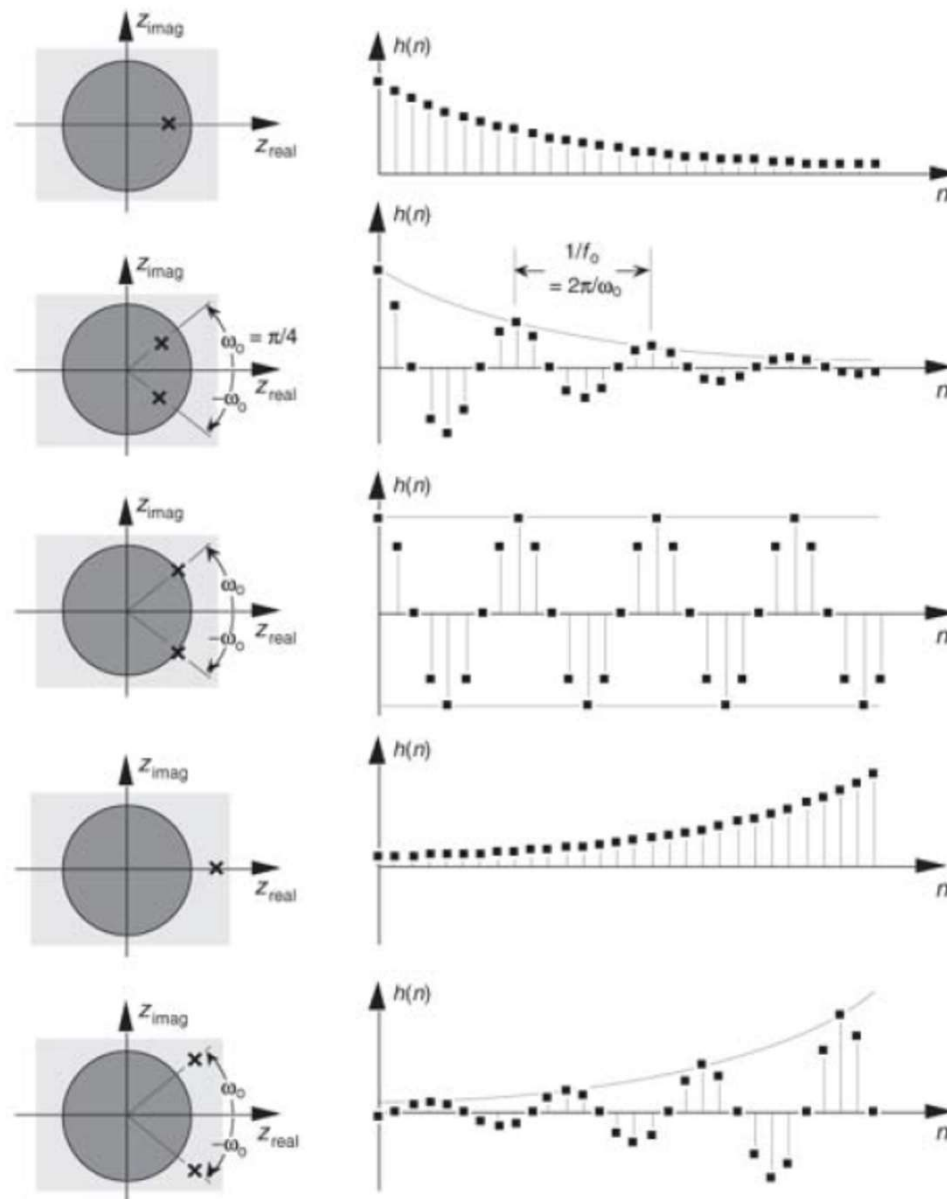
- Sistemas de segunda ordem:

$$H(z) = \frac{1}{1 - (2r \cos \theta)z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

$$z_1 = re^{j\theta}, \quad z_2 = re^{-j\theta}$$



- Representações de sinais no plano Z



Propriedades da Transf. Z

- 1) Linearidade

$$x_1[n] \xleftrightarrow{z} X_1(z), \quad \text{com RDC} = R_1,$$

$$\text{e } x_2[n] \xleftrightarrow{z} X_2(z), \quad \text{com RDC} = R_2,$$

$$ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{z} aX_1(z) + bX_2(z), \quad \text{com RDC} = R_1 \cap R_2,$$

- 2) Deslocamento no tempo

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z)$$

$$x[n - n_0] \xleftrightarrow{z} z^{-n_0} X(z)$$



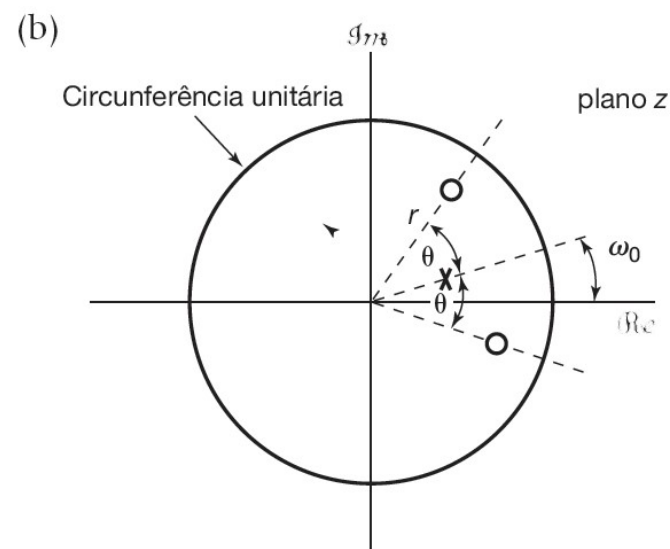
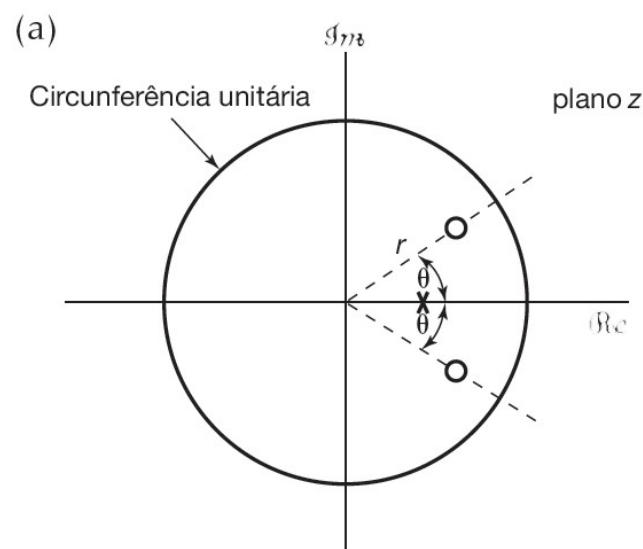
- 3) Mudança de escala no domínio Z

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z)$$

$$z_0^n x[n] \xleftrightarrow{z} X\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

– Considerando o caso $z_0 = e^{j\omega_0}$

$$e^{j\omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{z} X(e^{-j\omega_0} z)$$



- 4) Convolução

$$x_1[n] * x_2[n] \xleftrightarrow{z} X_1(z)X_2(z), \quad \text{com RDC} = R_1 \cap R_2,$$

- 5) Diferenciação (domínio Z)

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z)$$

$$nx[n] \xleftrightarrow{z} -z \frac{dX(z)}{dz}$$



Propriedade	Sinal	Transformada z	RDC
	$x[n]$	$X(z)$	R
	$x_1[n]$	$X_1(z)$	R_1
	$x_2[n]$	$X_2(z)$	R_2
Linearidade	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(z) + bX_2(z)$	Pelo menos, a intersecção de R_1 e R_2
Deslocamento no tempo	$x[n - n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$	R , exceto pela possível adição ou exclusão da origem
Mudança de escala no domínio- z	$e^{j\omega_0 n} x[n]$	$X(e^{-j\omega_0} z)$	R
	$z_0^n x[n]$	$X\left(\frac{z}{z_0}\right)$	$z_0 R$
	$a^n x[n]$	$X(a^{-1} z)$	Versão com mudança de escala de R (ou seja, $ a R =$ o conjunto de pontos $\{ a z\}$ para z em R)
Reflexão no tempo	$x[-n]$	$X(z^{-1})$	R invertido (ou seja, $R^{-1} =$ o conjunto de pontos z^{-1} , sendo que z está em R)
Expansão no tempo	$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[r], & n = rk \\ 0, & n \neq rk \end{cases}$ para algum inteiro r	$X(z^k)$	$R^{1/k}$ (ou seja, o conjunto de pontos $z^{1/k}$, sendo que z está em R)
Conjugação	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R
Convolução	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	Pelo menos, a intersecção de R_1 e R_2
Primeira diferença	$x[n] - x[n - 1]$	$(1 - z^{-1})X(z)$	Pelo menos, a intersecção de R e $ z > 0$
Acumulação	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}X(z)$	Pelo menos, a intersecção de R e $ z > 1$
Diferenciação no domínio- z	$nx[n]$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	R



Sinal	Transformada	RDC
1. $\delta[n]$	1	Todo z
2. $u[n]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z > 1$
3. $-u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$	$ z < 1$
4. $\delta[n - m]$	z^{-m}	Todo z , exceto 0 (se $m > 0$) ou ∞ (se $m < 0$)
5. $\alpha^n u[n]$	$\frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$	$ z > \alpha $
6. $-\alpha^n u[-n - 1]$	$\frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}$	$ z < \alpha $
7. $n\alpha^n u[n]$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1 - \alpha z^{-1})^2}$	$ z > \alpha $
8. $-n\alpha^n u[-n - 1]$	$\frac{\alpha z^{-1}}{(1 - \alpha z^{-1})^2}$	$ z < \alpha $
9. $[\cos \omega_0 n] u[n]$	$\frac{1 - [\cos \omega_0] z^{-1}}{1 - [2 \cos \omega_0] z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
10. $[\sin \omega_0 n] u[n]$	$\frac{[\sin \omega_0] z^{-1}}{1 - [2 \cos \omega_0] z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
11. $[r^n \cos \omega_0 n] u[n]$	$\frac{1 - [r \cos \omega_0] z^{-1}}{1 - [2r \cos \omega_0] z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$
12. $[r^n \sin \omega_0 n] u[n]$	$\frac{[r \sin \omega_0] z^{-1}}{1 - [2r \cos \omega_0] z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$ z > r$



Caracterização de sistemas usando transf. Z

- Causalidade

Para sistema causal

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

não inclui quaisquer potências positivas de z.

Um sistema LIT de tempo discreto é causal se e somente se a RDC de sua função de sistema for o exterior de um círculo, incluindo o infinito.

Um sistema LIT de tempo discreto com função de sistema $H(z)$ racional é causal se e somente se:

- a) a RDC for o exterior de um círculo que inclui o polo mais externo;
- b) com $H(z)$ expresso como uma razão de polinômios em z, a ordem do numerador não for maior que a ordem do denominador.



• Estabilidade

- “Mantra”: A estabilidade de um sistema LIT de tempo discreto é equivalente a sua resposta ao impulso ser absolutamente somável.

Um sistema LIT é estável se e somente se a RDC de sua função de sistema $H(z)$ incluir a circunferência unitária $|z| = 1$.

Um sistema LIT causal com função de sistema racional $H(z)$ é estável se e somente se todos os polos de $H(z)$ estiverem dentro do círculo unitário.

• Sistemas LIT por equações de diferenças lineares

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z)$$

$$Y(z) \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = X(z) \sum_{k=0}^M b_k z^{-k}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

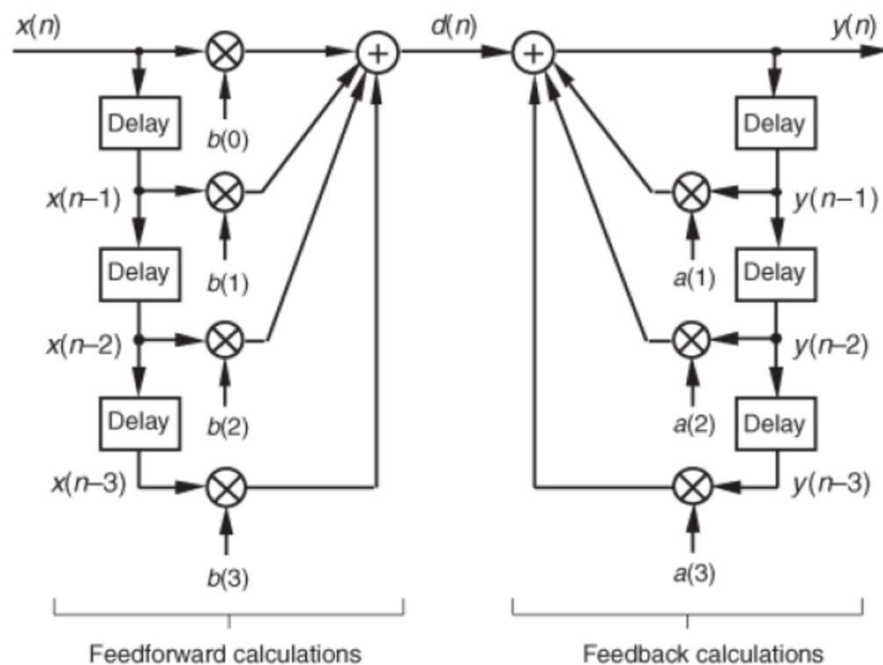


- Exemplo 5: Considere um sistema LIT para o qual a entrada $x[n]$ e a saída $y[n]$ satisfaçam a equação abaixo. Determine $h[n]$.

$$y[n] - \frac{1}{2} y[n-1] = x[n] + \frac{1}{3} x[n-1]$$

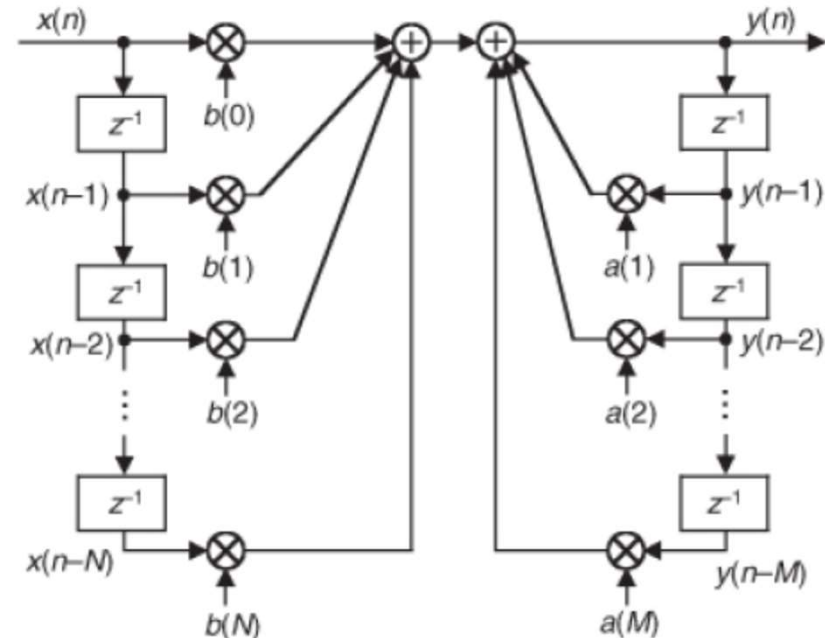


- Representações em diagramas de blocos para sistemas LIT causais discretos



(6-2)

$$y[n] = b(0)x[n] + b(1)x[n-1] + b(2)x[n-2] + b(3)x[n-3] \\ + a(1)y[n-1] + a(2)y[n-2] + a(3)y[n-3].$$



$$Y(z) = b(0)X(z) + b(1)X(z)z^{-1} + b(2)X(z)z^{-2} + \dots + b(N)X(z)z^{-N} \\ + a(1)Y(z)z^{-1} + a(2)Y(z)z^{-2} + \dots + a(M)Y(z)z^{-M}$$

Mapeamento entre planos S e Z

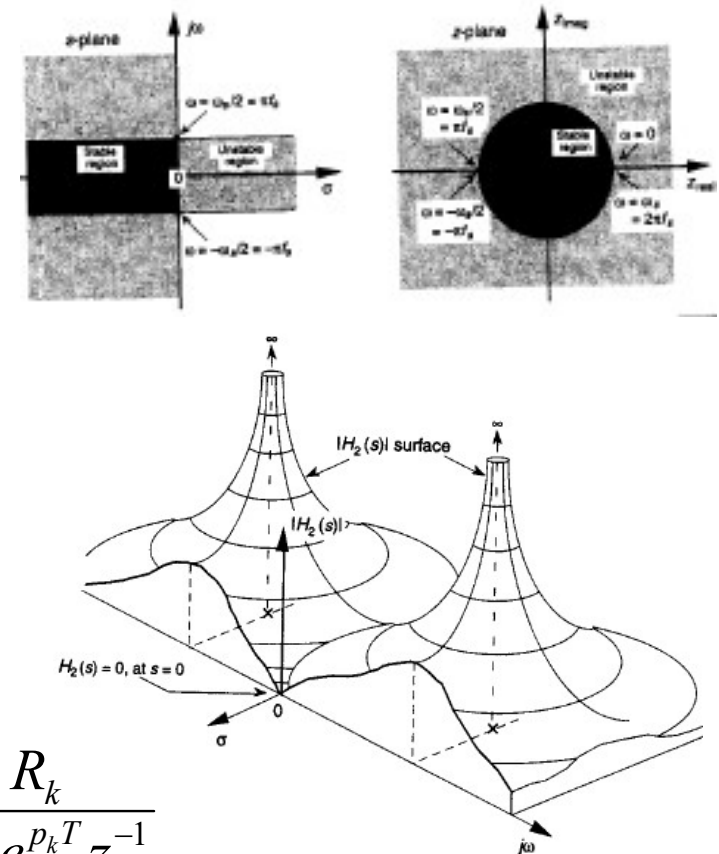
- Três técnicas:
 - invariância ao impulso;
 - transformação bilinear;
 - Métodos otimizados.

- **1) Invariância ao impulso:**

- Faça a transformação:

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{R_k}{s - p_k} \xrightarrow{w = \Omega T} H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{R_k}{1 - e^{p_k T} z^{-1}}$$

Tem que estar na forma frações parciais



- Exemplo: transforme o filtro analógico abaixo em digital considerando $T=0.1$

Solução:

Convertendo em frações parciais

$$H_a(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6} = \frac{2}{s+3} - \frac{1}{s+2}$$

Os polos $p_1=-3$ e $p_2=-2$ considerando $T=0.1$ geram:

$$H(z) = \frac{2}{1 - e^{-3T}z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-2T}z^{-1}} = \frac{1 - 0.8966z^{-1}}{1 - 1.5595z^{-1} + 0.6065z^{-2}}$$



• 2) Transformação bilinear:

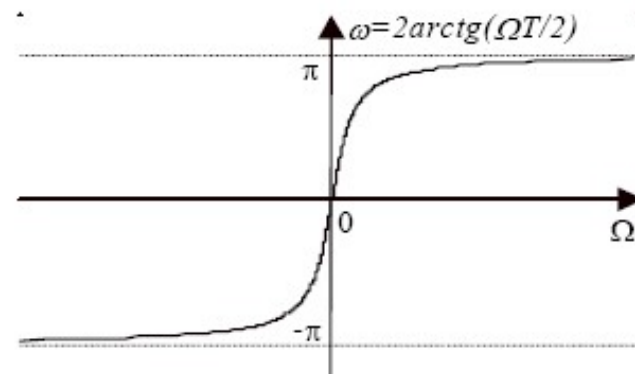
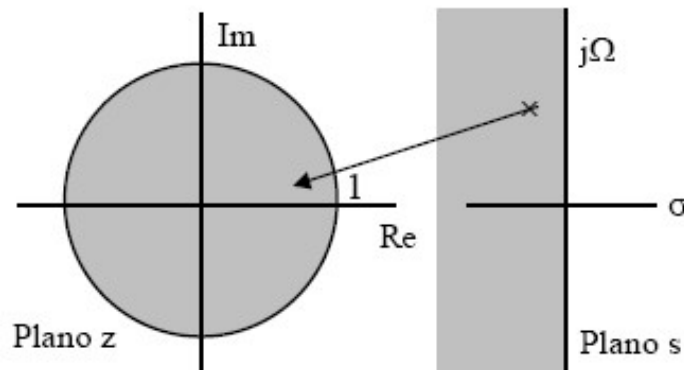
- Faça a transformação:

$$s = \frac{2}{T} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)$$

- Mapeamento entre frequências:

$$\Omega = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \left(\frac{w}{2} \right)$$

$$w = 2 \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\Omega T}{2} \right)$$



- Exemplo: transforme o filtro analógico abaixo em digital considerando $T=1$

$$H_a(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 5s + 6}$$

Solução

Usando a relação:

$$H(z) = H_a \left(\frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) = H_a \left(2 \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)$$

Aplicando a função:

Simplificando:

$$H(z) = \frac{3 + 2z^{-1} - z^{-2}}{20 + 4z^{-1}} = \frac{0.15 + 0.1z^{-1} - 0.05z^{-2}}{1 + 0.2z^{-1}}$$




Convolução no domínio discreto

- “Curiosidade”:
 - Exemplo: considere a entrada e resposta impulsiva abaixo. Determine a saída do sistema.

