

Capítulo 6*:

Resposta dinâmica

Prof. Alan Petrônio Pinheiro

Universidade Federal de Uberlândia

Faculdade de Engenharia Elétrica

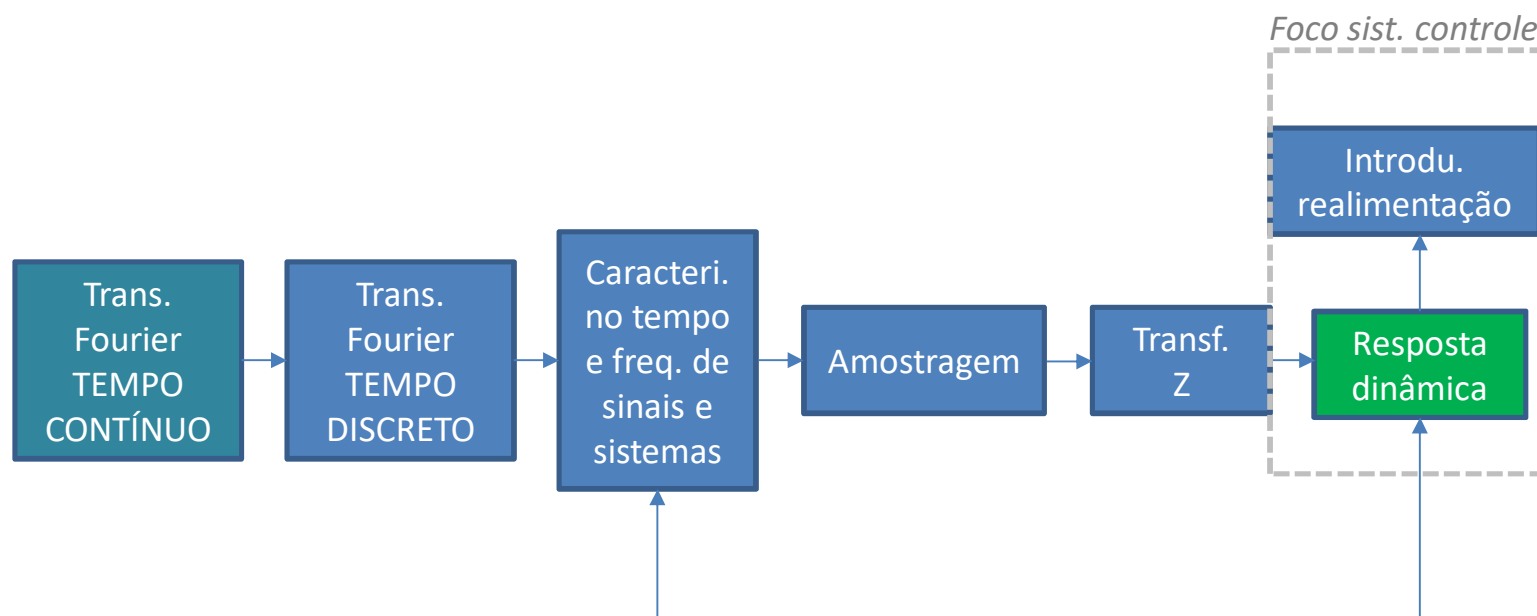
alanpetronio@ufu.br



Sinais e Sistemas 2

Capítulo 6: Resposta Dinâmica

- Introdução
- Função de transferência
- Polos e zeros
- Representação de sistemas por diagramas
- Efeito localização polos
- Especificações domínio tempo
- Estabilidade



Introdução

Sinais e Sistemas 2

Capítulo 6: Resposta Dinâmica

- Introdução
- Função de transferência
- Polos e zeros
- Representação de sistemas por diagramas
- Efeito localização polos
- Especificações domínio tempo
- Estabilidade

- Existência de 3 domínios para análise das respostas de sistemas dinâmicos:

$$\dot{x}_3 = x_4 = -\frac{a_0}{a_3}x_1 - \frac{a_1}{a_3}x_2 - \frac{a_2}{a_3}x_3 + \frac{1}{a_3}u(t)$$

or,

- Plano s (sistemas contínuos no tempo)
- Resposta em frequência
- Espaço de estados

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{a_3} \overset{\substack{\downarrow \\ \mathbf{A}}}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \overset{\substack{\downarrow \\ \mathbf{B}}}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/a_3 \end{bmatrix}} u(t).$$

- Identificação da função de transf. do sistema
 - Fazer análise de polos e zeros para caracterizar sistema
- Efeitos da introdução da realimentação
 - Estabilidade e teste de Routh

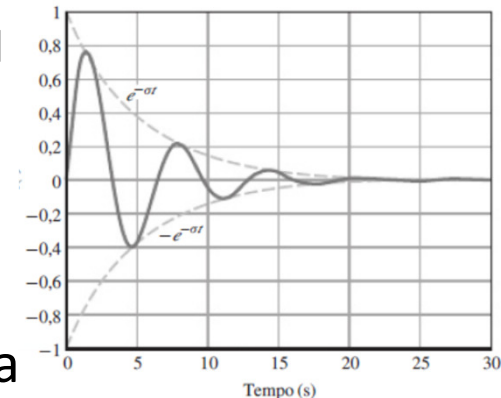
Funções de transferência

Sinais e Sistemas 2

Capítulo 6: Resposta Dinâmica

- Introdução
- Função de transferência
- Polos e zeros
- Representação de sistemas por diagramas
- Efeito localização polos
- Especificações domínio tempo
- Estabilidade

- Uma entrada $x(t)=e^{st}$ resulta em uma saída $y(t)=H(s)e^{st}$
 - Saída sai diferente da entrada pelo fator $H(s)$
 - Lembrando que: $s=a+bj$
 - a = comportamento de energia da envoltória do sinal
 - $b = w$ = frequência de oscilação do sinal



- Definição forma de função transferência

“a função $H(s)$, que é um ganho de transferência de $U(s)$ para $Y(s)$ – entrada para saída – é chamada de função de transferência”

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = H(s),$$

*“A função de transferência $H(s)$ é a transformada de Laplace da **resposta ao impulso** $h(t)$ ”*

→ Resposta natural



Sinais e Sistemas 2

Capítulo 6: Resposta Dinâmica

- Introdução
- Função de transferência
- Polos e zeros
- Representação de sistemas por diagramas
- Efeito localização polos
- Especificações domínio tempo
- Estabilidade

- Fazendo a representação:

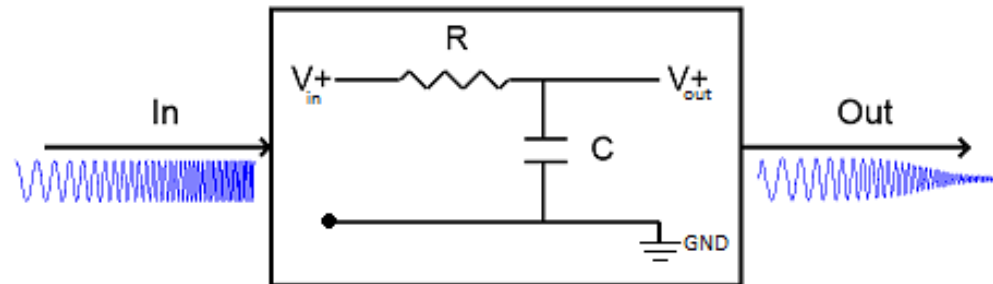
$$H(j\omega) = M(\omega)e^{j\phi(\omega)}$$

onde

$$M = |H(j\omega)|, \phi = \angle H(j\omega).$$

pode-se dizer que:

*‘Um sistema representado por uma função de transferência $H(s)$ tem uma entrada senoidal com amplitude A , a saída também será senoidal **com a mesma frequência** e com magnitude AxM e terá um deslocamento de fase de ângulo de ϕ .’*



Transfer Function: $T(j\omega) = \frac{\text{Out}}{\text{In}} = \frac{1}{1 + j\omega CR}$

Polos e zeros

Sinais e Sistemas 2

Capítulo 6: Resposta Dinâmica

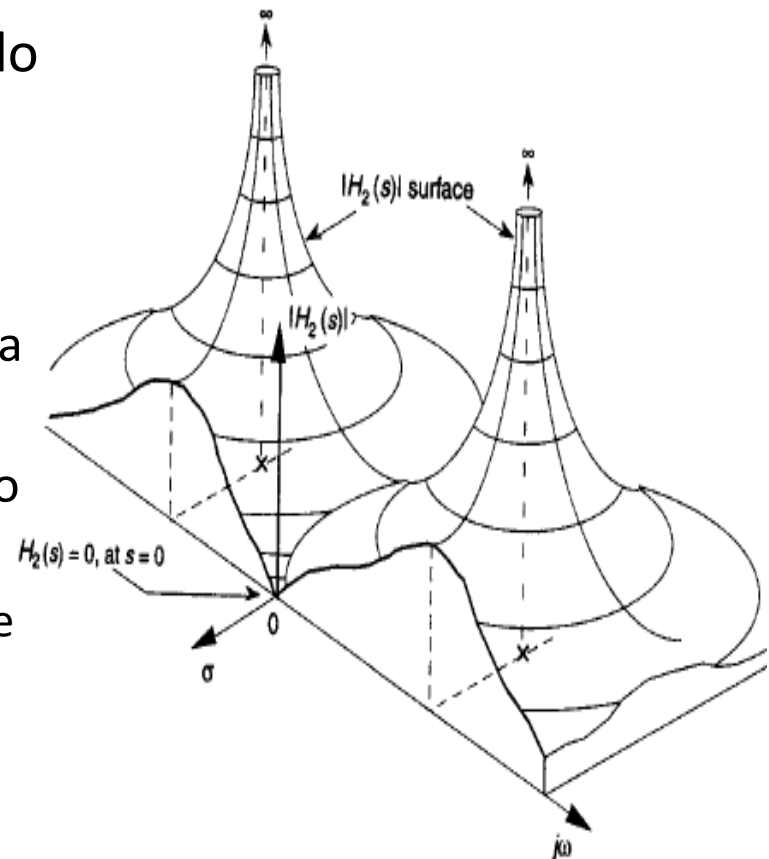
- Introdução
- Função de transferência
- **Polos e zeros**
- Representação de sistemas por diagramas
- Efeito localização polos
- Especificações domínio tempo
- Estabilidade

• Forma geral

$$H(s) = \frac{b_1 s^m + b_2 s^{m-1} + \dots + b_{m+1}}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{N(s)}{D(s)}, \quad K \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

• Polos determina estabilidade do sistema

- Também referenciados como **MODOS** do sistema
- Sua localização é o “coração” da realimentação
- Sistemas físicos geralmente não podem ter $n < m$
 - Em outra palavras: mais polos que zeros!



Sinais e Sistemas 2

Capítulo 6: Resposta Dinâmica

- Introdução
- Função de transferência
- **Polos e zeros**
- Representação de sistemas por diagramas
- Efeito localização polos
- Especificações domínio tempo
- Estabilidade

Exemplo: considere que um motor elétrico teve sua função transferência modelada como $G(s)$. Foi considerado que a saída do motor é a velocidade angular no seu eixo.

$$G(s) := \frac{100}{s^2 + 10,1s + 101}$$

Avalie seu comportamento em regime permanente. Para isto considere sua resposta ao degrau. Faça isto computacionalmente.

```
+  
1  b = [0 0 100];  
2  a = [1 10.1 101];  
3  função_transf = tf(b,a);  
4  t=0:0.01:5;  
5  saida = step(função_transf, t);  
6  plot(t, saida);  
□
```

Sinais e Sistemas 2

Capítulo 6: Resposta Dinâmica

- Introdução
- Função de transferência
- **Polos e zeros**
- Representação de sistemas por diagramas
- Efeito localização polos
- Especificações domínio tempo
- Estabilidade

Exemplo: encontre a função de transferência de um sistema que é representado pela equação:

$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 25y = 9u + 3\dot{u}$$

1	<code>b = [3 9];</code>
2	<code>a = [1 6 25];</code>
3	<code>[z, p, k] = tf2zp(b, a);</code>
4	<code>[b, a] = zp2tf(z, p, k);</code>

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3(s+3)}{(s+3-4j)(s+3+4j)}$$

Observação: comandos abaixo encontram a resposta do sistema para um pulso de 25 amostras de 0,1 s de duração:

```
b=[0 0 0.0002];
a=[1 0 0];
sysG=tf(b, a);
t=0:0.01:10;
u1=[zeros(1,500) 25*ones(1,10) zeros(1,491)];
[y1]=lsim(sysG,u1,t);
y1=180/pi *y1; % saída em graus
plot(t,u1); %sinal de entrada
plot(t,y1); %sinal de saída
```



Representação sistemas por diagramas

Sinais e Sistemas 2

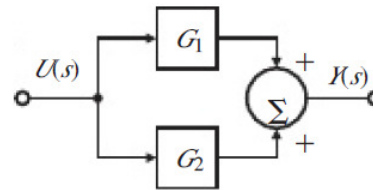
Capítulo 6: Resposta Dinâmica

- Introdução
- Função de transferência
- Polos e zeros
- Representação de sistemas por diagramas
- Efeito localização polos
- Especificações domínio tempo
- Estabilidade

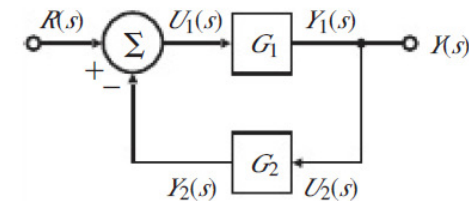
• Exemplos ligações



$$\frac{Y_2(s)}{U_1(s)} = G_1 G_2$$



$$\frac{H(s)}{U(s)} = G_1 + G_2$$



$$\frac{H(s)}{R(s)} = \frac{G_1}{1 + G_1 G_2}$$

Realimentação negativa

• Realimentação

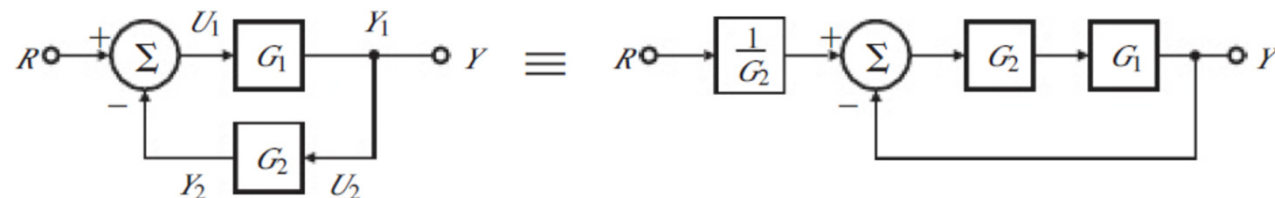
— Negativa

$$\begin{aligned} U_1(s) &= R(s) - Y_2(s), \\ Y_2(s) &= G_2(s) G_1(s) U_1(s), \\ Y_1(s) &= G_1(s) U_1(s), \end{aligned}$$

$$Y_1(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s) G_2(s)} R(s)$$

— Positiva

— Realimentação unitária



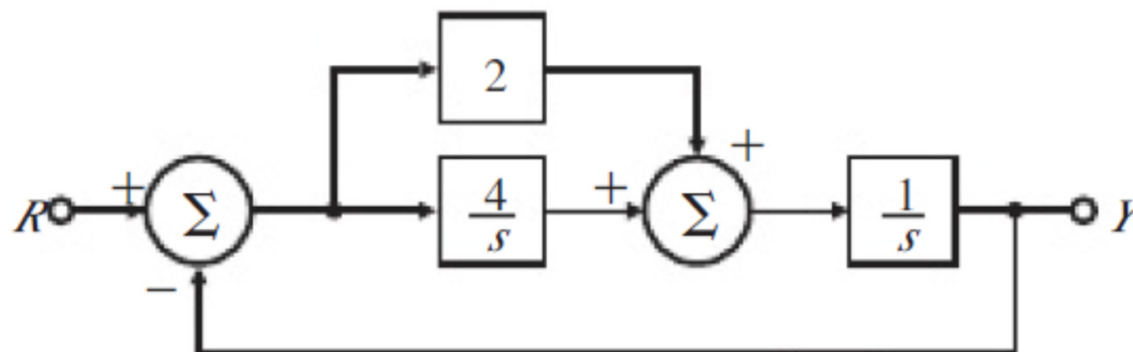


Sinais e Sistemas 2

Capítulo 6: Resposta Dinâmica

- Introdução
- Função de transferência
- Polos e zeros
- Representação de sistemas por diagramas
- Efeito localização polos
- Especificações domínio tempo
- Estabilidade

Exemplo: encontro a função de transferência do sistema mostrado abaixo



Efeitos da localização dos polos

Sinais e Sistemas 2

Capítulo 6: Resposta Dinâmica

- Introdução
- Função de transferência
- Polos e zeros
- Representação de sistemas por diagramas
- **Efeito localização polos**
- Especificações domínio tempo
- Estabilidade

- Considerando funções de transferência no formato:

$$H(s) = b(s)/a(s).$$

Considerando polos de 1ª ordem

$$H(s) = \frac{1}{s + \sigma} \longleftrightarrow h(t) = e^{-\sigma t} 1(t).$$

Conclusão:

quando $\sigma > 0 \rightarrow$ o polo está no semiplano $s < 0$;

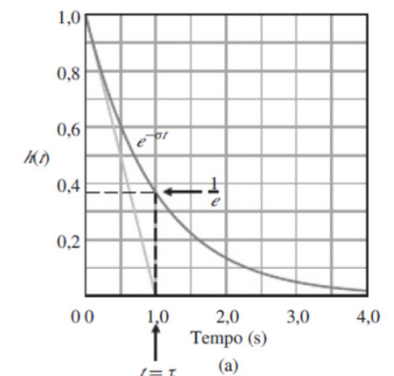
logo, a função exponencial decai;

logo a resposta ao impulso é estável;

caso contrário (polo à direita), a função exponencial cresce exponencialmente

- Definição de uma constante de tempo τ que indica o decaimento de $h(t)$ até um ponto específico = $1/e$

$$\tau = 1/\sigma$$



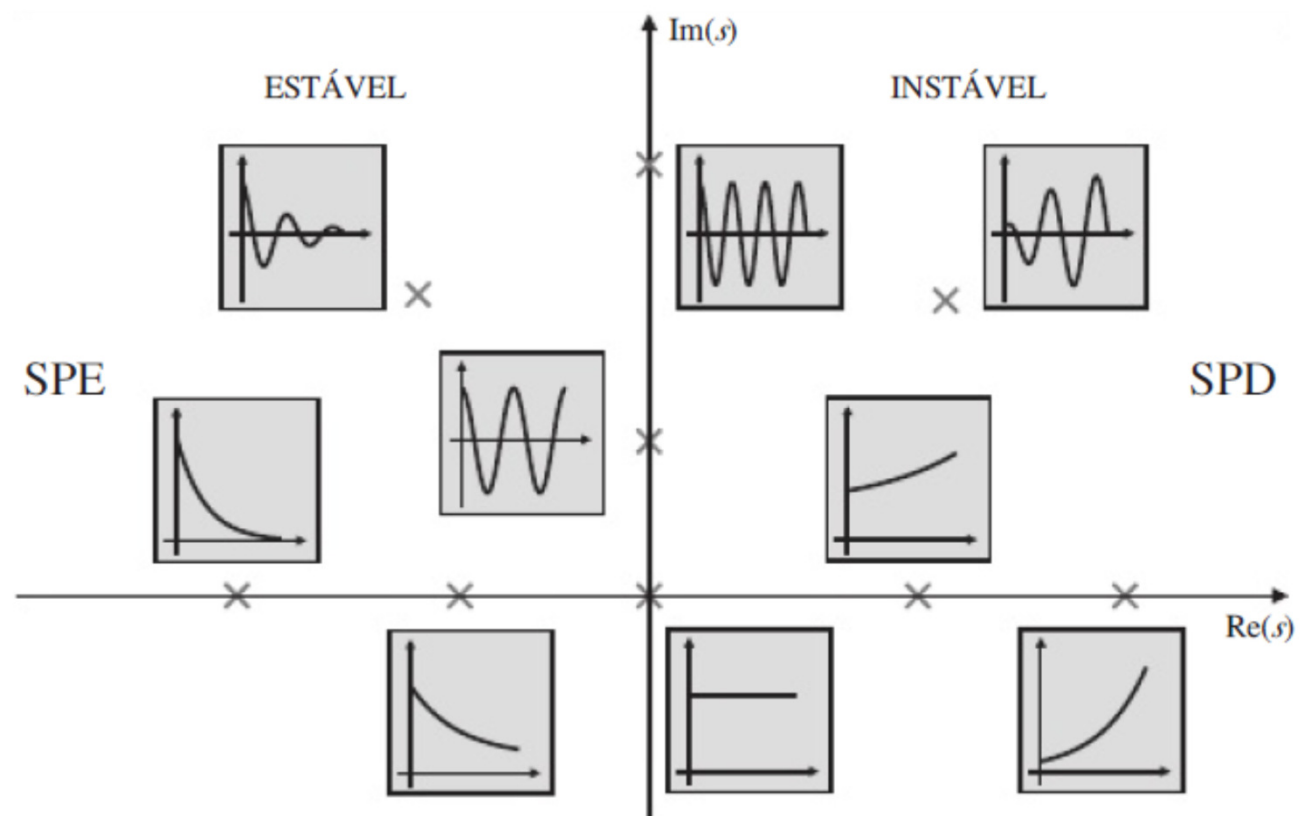


Sinais e Sistemas 2

Capítulo 6: Resposta Dinâmica

- Introdução
- Função de transferência
- Polos e zeros
- Representação de sistemas por diagramas
- **Efeito localização polos**
- Especificações domínio tempo
- Estabilidade

- Efeitos nos polos na estabilidade do sistema:





Sinais e Sistemas 2

Capítulo 6: Resposta Dinâmica

- Introdução
- Função de transferência
- Polos e zeros
- Representação de sistemas por diagramas
- Efeito localização polos
- Especificações domínio tempo
- Estabilidade

- Considerando polos no SPE (semi-plano esquerdo):

$$s = -\sigma \pm j\omega_d$$

como veem como pares complexos conjugados, temos:

$$d(s) = (s + \sigma - j\omega_d)(s + \sigma + j\omega_d) = (s + \sigma)^2 + \omega_d^2$$

Frequentemente, aparecem sistemas com este formato:

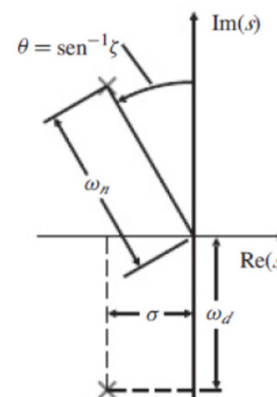
$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \longleftrightarrow H(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1 - \zeta^2)} \longleftrightarrow h(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\sigma t} (\sin \omega_d t) 1(t).$$

Comparando as duas eq. anteriores, temos:

$$\sigma = \zeta\omega_n \quad \omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2},$$

- ζ = coef. Amortecimento
- ω_n = freq. natural

Ou, geometricamente:



Sinais e Sistemas 2

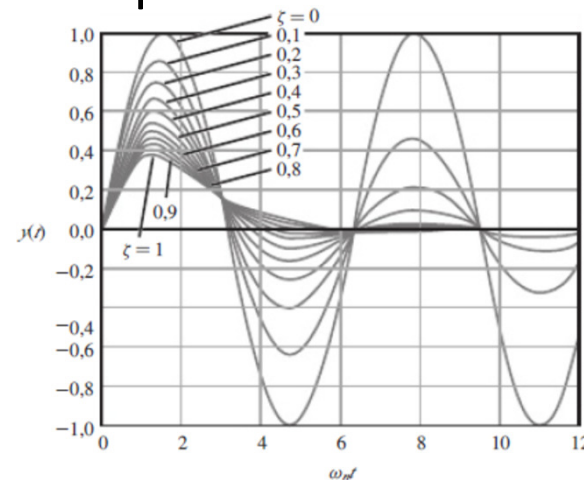
Capítulo 6: Resposta Dinâmica

- Introdução
- Função de transferência
- Polos e zeros
- Representação de sistemas por diagramas
- **Efeito localização polos**
- Especificações domínio tempo
- Estabilidade

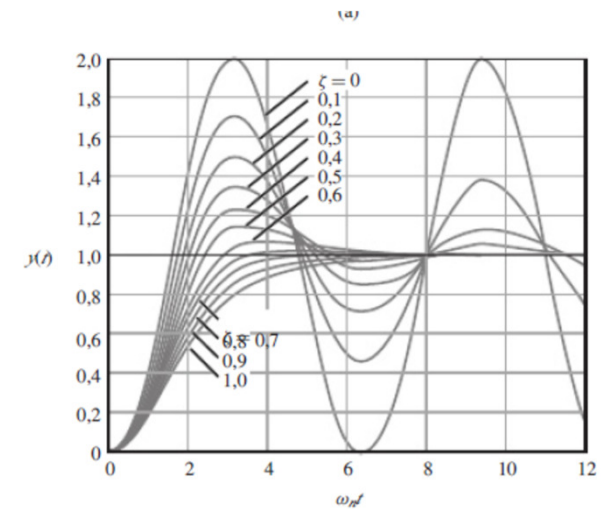
- Logo, tanto σ quanto ω_d passam a depender dos termos ζ e ω_n .

$$s = -\sigma \pm j\omega_d$$

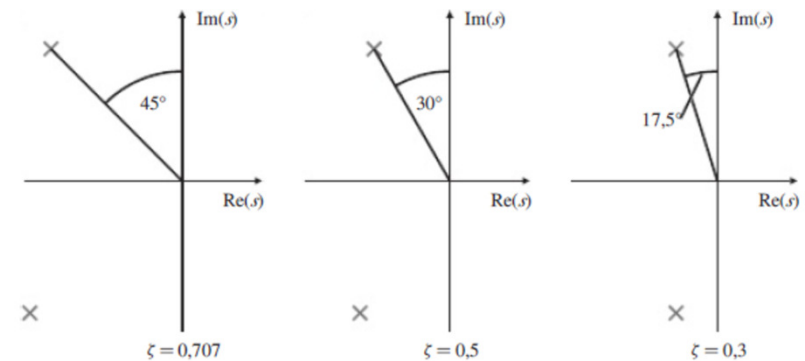
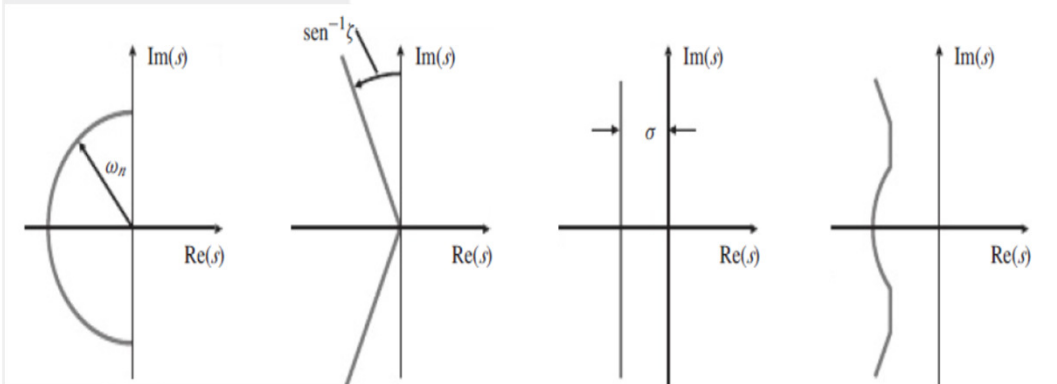
Exemplo:



Resposta ao impulso



resposta ao degrau





Sinais e Sistemas 2

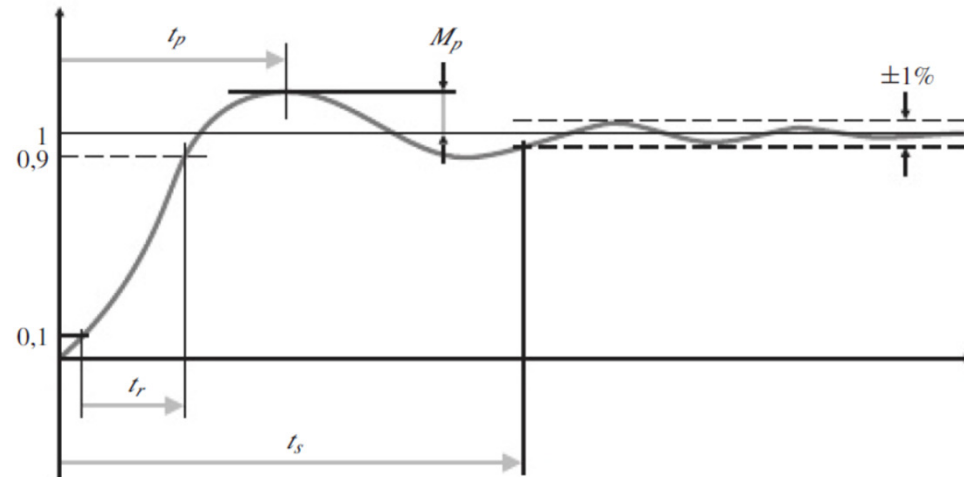
Capítulo 6: Resposta Dinâmica

- Introdução
- Função de transferência
- Polos e zeros
- Representação de sistemas por diagramas
- Efeito localização polos
- Especificações domínio tempo
- Estabilidade

Especificações domínio tempo

- Válido para sistemas de segundo grau:

Obs.: podem ser estendidos grosseiramente a outros sistema de maior ordem



- Tempo subida (rise time) t_r : atinge proximidades de sua referência
- Tempo acomodação t_s : tempo para transitório terminar (acomodação 1%)
- Sobressinal/overshoot M_p : máximo em relação ao seu final
- Tempo de pico t_p : tempo necessário para alcançar seu pico

Fórmulas:

$$t_r \cong \frac{1,8}{\omega_n}$$

$$t_s = \frac{4,6}{\zeta \omega_n} = \frac{4,6}{\sigma}$$

$$M_p = e^{-\pi \zeta / \sqrt{1-\zeta^2}}, \quad 0 \leq \zeta < 1$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

Sinais e Sistemas 2

Capítulo 6: Resposta Dinâmica

- Introdução
- Função de transferência
- Polos e zeros
- Representação de sistemas por diagramas
- Efeito localização polos
- Especificações domínio tempo
- Estabilidade

• Variados critérios:

1) Clássico

Um sistema LIT é dito estável se todas as raízes do polinômio no denominador de sua função de transferência têm parte real negativa (isto é, todas raízes estão no lado esquerdo do plano- s) e é instável em caso contrário.

2) Estável no sentido entrada limitada-saída limitada (BIBO)

O sistema com resposta ao impulso $h(t)$ é BIBO estável se, e somente se,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty.$$

3) Estabilidade interna

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{K \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}, \quad y(t) = \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t}$$

O sistema é estável se, e somente se (condição necessária e suficiente), cada termo na Eq. (3.80) tender a zero quando $t \rightarrow \infty$:

$$e^{p_i t} \rightarrow 0 \quad \text{para todos os } p_i$$

Sinais e Sistemas 2

Capítulo 6: Resposta Dinâmica

- Introdução
- Função de transferência
- Polos e zeros
- Representação de sistemas por diagramas
- Efeito localização polos
- Especificações domínio tempo
- Estabilidade

4) Routh

Considere o denominador de $H(s)$ como:

$$d(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n$$

Logo:

Uma condição necessária (mas não suficiente) para a estabilidade é que todos os coeficientes do polinômio característico sejam positivos.

Pois se houver na negativo, indica que existe polo no lado direito do plano S.

Existe também a condição necessária e suficiente:

Um sistema é estável se, e somente se, todos os elementos da primeira coluna do arranjo de Routh forem positivos.

Arranjo de Routh:

Linha	n	s^n :	1	a_2	a_4	$\cdots$
Linha	$n-1$	s^{n-1} :	a_1	a_3	a_5	$\cdots$
Linha	$n-2$	s^{n-2} :	b_1	b_2	b_3	$\cdots$
Linha	$n-3$	s^{n-3} :	c_1	c_2	c_3	$\cdots$
	:	:	:	:	:	

$$b_1 = -\frac{\det \begin{bmatrix} 1 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{bmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 a_2 - a_3}{a_1}, \quad b_2 = -\frac{\det \begin{bmatrix} 1 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{bmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 a_4 - a_5}{a_1}, \quad b_3 = -\frac{\det \begin{bmatrix} 1 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{bmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 a_6 - a_7}{a_1},$$

$$c_1 = -\frac{\det \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}, \quad c_2 = -\frac{\det \begin{bmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}, \quad c_3 = -\frac{\det \begin{bmatrix} a_1 & a_7 \\ b_1 & b_4 \end{bmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1}.$$